**Timescale separation**

1, Quantum Zeno effect

“With frequent measurements, the state of quantum system will not evolve”

Consider spin ½ system, measured repeatedly at stable time interval along z axis. Total time of the experiment is fixed . Between measurements, the dynamics is induced by Hamiltonian . Calculate probability that spin will not be changed during N measurements . Examine the limit of frequent measurements .

Hint:

2,Adiabatic theorem: Demonstration

Consider spin ½ system initially in state and with internal Hamiltonian . External field is slowly switched on from to . During , we assume Hamiltonian

. Demonstrate adiabatic theorem.

a, In the basis of instantaneous eigenstates expand the Schrodinger equation and prove that

b, Estimate the coupling matrix for the spin system under discussion

and show that it is smooth in time and can be bounded as , where the constant is independent of time and T.

c, Given the initial condition , show for the spin system that .

Hint: Iterative approach: Solve the equation above for with at r.h.s. and substitute to the equation for .

**Molecule in electromagnetic field**

1, Optical and NMR Bloch equation.

Starting from optical Bloch equation for two level system under electric field (𝝘- emission rate, pure dephasing rate, dipole, E(t) electric field)



Derive the NMR Bloch equations by assigning magnetizations by Pauli matrices σ through



where states and correspond to axis spin states and , respectively. Reinterpret the fields, rates, etc.

2, Consider the following superoperations on Liouville space

a, Reminder: where ϱ is arbitrary operator (density matrix). Prove!

b, Show explicitly that the unitary transformation which define interaction picture can be equivalently introduced in both Liouville and Hilbert space, in other words :

where

**Approximate methods**

Consider anharmonic (quartic) oscillator with the potential .

Problem 1,

By using variational method calculate the energy of ground state using nolinear parametrization .

Problem 2,

By using variational method calculate the energy of the first excited level ground state using nolinear parametrization

Problem 3.

Find the first two eigenenergies by perturbation method to order . (Algebra of creation and annihilation operators will be useful.)

Compare the results sub 1,2,3 by plotting graphs of eigenergies as functions of .

**Relativistic quantum mechanics: Dirac particle in external EM field.**

1,Consider a half-spin (Dirac) particle in the purely longitudinal electromagnetic fields, i.e. ϕ(r)=0 .

a, Turn the four component (time – independent) Dirac equation

into the relation for (the upper) two components representing positive energies. Use nonperturbative approach and standard Dirac representation with , 𝛽=, where are Pali matrices, and is a unit 2x2 matrix.

b,Turn relation sub a, into the time domain.

c, Compare with (single component ) Klein-Gordon equation for spin-less particle in the purely longitudinal electromagnetic fields

**Quantum world and statistics**

1, Particle can move in a box of volume V, or can be adsorbed on a few binding places on the surface . Find the equilibrium distribution, i.e. compare the statistics of discrete quantum and continuous classical variable. Hint: Define the problem quantum mechanically and then impose classical limit for the box.

2,Consider N bosons, each can occupy either state 𝛼 at energy , or state 𝛽 at . Assuming thermodynamic equilibrium:

a; List many-body states of Hilbert space

b, Assign the equilibrium density matrix, calculate all matrix elements.

c, Calculate the occupation numbers at 𝛼 and 𝛽 . Explain the differences against the standard expression for the Bose-Einstein distribution.

**Separace časových škál**

1, Kvantový Zenonův paradox “Achilles a želva”

Uvažte částici spinu ½ , u které opakovaně zjišťujeme polarizaci v ose z. Časové intervaly nechť jsou stálé a celková doba experiment nechť je pevná , a to . Mezi jednotlivými měřeními je dynamika určena Hamiltoniánem . Spočtěte pravděpodobnost , že se polarizace nezmění při žádném z N měření a vyšetřete limitu častého měření .

Návod:

2,Demonstrace adiabatického teorému

Uvažte částici spinu ½ nacházející se na začátku ve stavu . Interní Hamiltonián je V čase pomalu spouštíme externí pole až do času T. Během zapínání , platí Předveďte adiabatický teorém

a, S použitím rozpisu do báze okamžitých vlastních stavů

transformujte Schrodingerovu rovnici do

b, Vypočtěte matici pro zmíněný spinový systém. Ukažte že její elementy se vyvíjejí povlovně a pro pomalé zapínanání jsou velmi male neboť je lze omezit vztahem .

c, Pro počáteční podmínku , ověřte adiabatický teorém, tj. ukažte že pro zmíněný spinový system .

Návod: Nejprve vyřešte rovnici pro při odhadu na pravé straně (iterativní způsob řešení) a řešení dosaďte do rovnice pro .

**Molekula v elektromagnetickém poli**

1, Optické a magnetické (NMR) Blochovy rovnice

Z optických Blochových rovnic pro dvouhladinovou molekulu ve vnějším elektromagnetickém poli (𝝘- rychlostní konstanta emise, rychlostní konstanta čistého rozfázování, dipólový moment, E(t) elektrické pole)



Přepište do NMR Blochových rovnic by připsáním magnetiyace podle Pauliho matic σ. (Stavy e a g ztotožněte se spinovými polarizacemi + a – podél osy z .)



stavy and ztotožněte se spinovými polarizacemi and podél osy z. Reinterpretujte významy, polí , parametrů atd.

2, Uvažte následující superoperace na Liouvillově prostoru

a, Upozornění: kde ϱ je libovolný operator (matice hustoty). Proveďte!

b, Explicitní propočtem ukažte že unitární transformace definující interakční obraz může být ekvivalentě odvozena v Liouvilleově či Hilbertově prostoru, jinými slovy :

kde .

**Přibližné metody**

Uvažujte anharmonický oscilátor s potenciálem .

Příklad 1,

Spočtěte energii základního stavu variační metodou při užití nelineární parametrizace

Příklad 2,

Spočtěte energii první excitované hladiny anharmonického oscliátoru při užití nelineární parametrizace

Příklad 3,

Najděte první dvě vlastní energie rovněž perturbační metodou do řádu . (Algebra kreačních a anihilačních operátorů Vám bude k užitku.)

Srovnejte výsledky příkladů 1,2,3 najreslením grafu vlastních energií jako funkcí .

**Relativistická kvantová mechanika: Dirakovská částice ve vnějším EM poli**

Uvažte částici spinu ½ v čistě podélném elektromagnetickém poli, tj. ϕ(r)=0 .

a, Transformujte čtyřkomponentovou (bezčasovou) Dirakovu rovnici

do relace pro horní dvě komponenty s pozitivními energiemi užitím neporuchových postupů v Dirakově reprezentaci , 𝛽=.

b, Převeďte rovnici z předchozí úlohy a, do časové domény

c, a porovnejte ji s Klein-Gordonovou rovnicí pro bezspinovou částici v čistě podélném elektomagnetickém poli

**Kvantový svět a statistika**

1, Částice se může volně pohybovat v krabici, pokud ovšem není přilnuta k některému z mála vazných míst na povrchu. Najděte rovnovážné rozdělení, tj. porovnejte diskrétní statistiku kvantové proměnné s klasickým rozdělením spojitého charakteru. Návod: Nejprve si rozvažte celý systém kvantově a následně založte klasickou limitu pro krabici.

2, Každý z N bozonů může být nalezen na hladině 𝛼 energie , či na hladině 𝛽 energie . V termodynamické rovnováze:

a, Sepište seznam vícečásticových stavů Hilbertova prostoru

b, Připište matici hustoty. Vyčíslete její maticové prvky.

c, Spočtěte obsazovací číslo na hladinách 𝛼 a 𝛽 . Jemné úchylky od standardního výrazu Bozeho-Einsteinova rozdělení, kde se vzaly?