Cvičení z kvantové optiky

4. června 2014

Obsah

Kapitola 1

Klasická teorie fluktuací a koherence

1.1 Interferometry

Příklad 1:

Zjistěte kladně $E^+(t)$ a záporně $E^-(t)$ rotující část elektického pole pro

- $E(t) = \cos(\omega t)$
- $E(t) = \cos(\omega t)e^{-\lambda t^2}; \qquad \lambda \to 0$
- $E(t)$ je libovolné (tj. definujte $E^+(t), E^-(t)$ matematicky).
- $E(t) = \cos(\omega t)e^{-\lambda t^2}; \qquad \lambda \in \mathrm{R}^+$

Příklad 2:

Užitím zachování energie odvoďte obecný tvar matice Q pro štěpení světelného svazku na polopropustném zrcátku.

- Formulujte zachování energie maticově.
- Charakterizujte matice/reálné 2×2 matice vyhovující $Q^\dagger Q = 1$.
- Charakterizujte algebraicky důsledky malého posunu rozhraní.
- Ukažte, že volba fázové konvence není limitující.

Příklad 3:

Diskutujte Mach-Zenderův interferometr

- Odvoďte signál v obou výstupních ramenech.

- Všimněte si zachování energie.
- Vysvětlete důsledky formální záměny líc $\leftrightarrow$ rub u jednoho ze zrcátek.

1.2 Korelace 1. řádu

Příklad 4:

Dopplerovské rozšíření čáry. Pro soubor molekul vyzařujících $E = E_0 e^{i\phi} e^{i(\omega_0+\delta)t}$ s náhodnou rovnoměrně rozdělenou fází ϕ a husotou rozdělením posuvů přenosové frekvence $\rho(\delta) = \sqrt{\frac{mc^2}{2\pi kT\omega^2}} e^{\frac{-mc^2\delta^2}{2kT\omega^2}}$ sledující Dopplerův posuv souboru molekul s rovnovážným Maxwellovým rozdělením rychlostí vypočítejte (klasickou) korelaci prvního řádu $G_E(t_1 - t_2) \equiv \langle E^-(t' - t_1)E^+(t' - t_2)\rangle_{t'}$.

1.3 Korelace 2. řádu

Příklad 5:

Dokažte, že pro klasické korelace druhého řádu platí $g_I(0) \geq 1$. Návod: středovat $(I - \langle I\rangle)^2$.

Kapitola 2

Kvantová teorie koherence jednomódového světla

2.1 Fotonové čítání (semiklasická teorie)

Příklad 1:

Přímým výpočtem ověřte:

- normalizaci rozdělení $P_m(T) = \langle P_m(t,T)\rangle_t = \left\langle \frac{[\xi \bar{I}(t,T)T]^m}{m!} e^{-\xi \bar{I}(t,T)T} \right\rangle_t$ na $\sum_m P_m(T) = 1$.
- že uvedený tvar $P_m(t,T)$ řeší soustavu rovnic $\frac{d}{dT} P_m(t,T) = \xi I(t+T) \left(P_{m-1}(t,T) - P_m(t,T)\right)$.

Pozn.: $\bar{I}(t,T) \equiv T^{-1} \int_0^T I(t+\tau) d\tau$.

2.2 Korelace jednomodového světla

Příklad 2:

Vyjádřete operátor elektrického pole $\hat{E}$ jednomodového světla (v bezrozměrných jednotkách) pomocí operátorů kvadratur $\hat{X} = \frac{1}{2}(a + a^\dagger)$ a $\hat{Y} = \frac{1}{2i}(a - a^\dagger)$. Odvoďte komutátor operátorů kvadratur. [Výsledek: $[\hat{X}, \hat{Y}] = \frac{i}{2}$]

Příklad 3:

Z principu neurčitosti ukažte, že pro variance platí

$$\Delta E(\chi_1) \Delta E(\chi_2) \geq \frac{1}{4} |\sin(\chi_1 - \chi_2)|.$$

Použijte fakt, že je-li $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$, pak $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle\psi|\hat{C}|\psi\rangle|$. [k postupu: $[\hat{E}(\chi_1), \hat{E}(\chi_2)] = -\frac{i}{2} \sin(\chi_1 - \chi_2)$]

Příklad 4:

Pro stavy s ostrým počtem fotonů spočtěte:

- střední hodnotu pole $\langle N|\hat{E}(\chi)|N\rangle$
- střední hodnoty kvadratur $\langle N|\hat{X}|N\rangle$, $\langle N|\hat{Y}|N\rangle$
- střední hodnoty $\hat{X}^2$ a $\hat{Y}^2[\langle N|\hat{X}^2|N\rangle = \langle N|\hat{Y}^2|N\rangle = \frac{1}{2}(N+\frac{1}{2})]$
- ąum $\mathcal{N} = \langle N|(\hat{E}(\chi))^2|N\rangle - (\langle N|\hat{E}(\chi)|N\rangle)^2$

2.3 Koherentní stavy revisited

Příklad 5:

Pro koherentní stav $\alpha \equiv e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}|\oslash\rangle$ vyhodnoťte výraz

$$\langle\alpha|a^\dagger a a^\dagger a|\alpha\rangle.$$

Příklad 6:

Vypočtěte střední hodnotu elektrického pole $\langle E\rangle$, kvadratur $\bar{X} = \langle\hat{X}\rangle$,$\bar{Y} = \langle\hat{Y}\rangle$, kvadrátů kvadratur $\langle X^2\rangle$, $\langle Y^2\rangle$ a šum $\langle(\hat{X}-\bar{X})^2\rangle$, $\langle(\hat{Y}-\bar{Y})^2\rangle$ pro koherentní stav $|\alpha\rangle$.

Příklad 7:

Ukažte, že pro překryvy dvou koherentních stavů platí

$$|\langle\gamma|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\gamma|^2}$$

Příklad 8:

Dokažte rozklad jedničky koherentními stavy $\frac{1}{\pi}\int d\mathrm{Re}\alpha \ \int d\mathrm{Im}\alpha \ |\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{1}$.
Hinty: Fotonová báze je úplná. Dále se vám určitě bude hodit, že $\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2N+1} dr = \frac{1}{2}\Gamma(N+1) = \frac{N!}{2}$.

Kapitola 3

Mnohamódové světlo

3.1 Fotonové čítání chaotického světla

Příklad 1:

Pro rovnovážné (tepelné) záření v jednom módu

$$\hat{\rho} \equiv \frac{e^{-\beta\hbar\omega\hat{N}}}{\mathrm{Tr}\ e^{-\beta\hbar\omega\hat{N}}}; \qquad \hat{N} = a^{\dagger}a; \qquad \langle \ldots \rangle \equiv \mathrm{Tr} \ldots \hat{\rho}$$

- Vypočtěte několik prvních momentů pro rozdělení počtu fotonů $\langle \hat{N} \rangle$, $\langle \hat{N}^2 \rangle$,. . . .
- Vyjádřete druhý moment (varianci) $\langle \hat{N}^2 \rangle$ pomocí prvního $\langle \hat{N} \rangle$.
- Užitím generující funkce $f(\lambda) \equiv \mathrm{Tr}\lambda^{\hat{N}}\hat{\rho}$ dokažte, že faktoriálové momenty pro tepelné záření splňují

$$\left\langle \hat{N}\left(\hat{N}-1\right)\ldots\left(\hat{N}-m\right)\right\rangle = \left.\frac{d^{m+1}f(\lambda)}{d\lambda^{m+1}}\right|_{\lambda=1} = (m+1)!\left(\langle \hat{N} \rangle\right)^{m+1}$$

Příklad 2:

Dokažte, že matici hustoty tepelného záření lze reprezentovat souborem koherentních stavů (Glauber-Sudarshanova reprezentace)

$$\hat{\rho} = \int d\alpha P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|$$

(kde $\int d\alpha \equiv \int d\mathrm{Re}\alpha \ \int d\mathrm{Im}\alpha$) s hustotou

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi\langle N \rangle} e^{-|\alpha|^2/\langle N \rangle}$$

Příklad 3:

Zopakujte výpočty Příkladu 1, pokud sledujeme všechny módy:

$$\hat{N} = \sum_k \hat{N}_k; \qquad \hat{N}_k = a_k^\dagger a_k$$

Příklad 4:

Zjistěte počet fotonů pro záření černého tělesa s hustotou stavů $\rho(k)dk = \frac{L^3}{\pi^2} k^2 dk$. Poznámka: $\int dx \frac{x^2}{e^x - 1} = 2.4$

Příklad 5:

Pro tepelné záření vypočtěte korelační funkce prvého $\langle E^-(t-t_1)E^+(t-t_2)\rangle$ a druhého řádu $\langle E^-(t-t_2)E^-(t-t_1)E^+(t-t_1)E^+(t-t_2)\rangle$.

3.2 Štěpení svazků

Příklad 6:

Ověřte, že ortonormální ($Q^\dagger Q = 1$) transformace $\tilde{a}_i = \sum_j Q_{ij} a_j$, se přenáší komutační relace $[a_i^\dagger, a_j] = \delta_{ij} \Rightarrow [\tilde{a}_i^\dagger, \tilde{a}_j] = \delta_{ij}$.

Příklad 7:

Interpretujte Příklad 6 pro štěpení svazku.

Příklad 8:

Ukažte, že jeden foton $|\psi\rangle = a_1^\dagger|\oslash\rangle$ se na zrcátku nerozdvojí, a tak HBT interferometr nejeví signál

$$\langle\psi|a_1'^\dagger a_2'^\dagger a_1' a_2'|\psi\rangle = 0.$$

Vypočtěte dále šum za rubovou stranou zrcátka $\langle\psi|E_2'(\chi)^2|\psi\rangle$.

Příklad 9:

Ukažte, že signál v HBT interferometru odpovídá

$$\langle a_1'^\dagger a_2'^\dagger a_1' a_2'\rangle = \mathcal{R}^2\mathcal{T}^2\langle a_1^\dagger a_1(a_1^\dagger a_1 - 1)\rangle.$$

Příklad 10:

Ukažte, že koherentní stav světla se na zrcátku rozdělí na dva koherentní svazky (tj. ukažte, že klasická limita kvantového popisu je korektní).

3.3 Dvoufotonové mnohamódové stavy

Příklad 11:

Zjistěte normovací podmínku $\langle 2_\beta | 2_\beta \rangle = 1$ pro dvoufotonový stav definovaný

$$|2_\beta\rangle \equiv \int dtdt'\beta(t,t')a^\dagger(t)a^\dagger(t')|\oslash\rangle = \int d\omega d\omega'\beta(\omega,\omega')a^\dagger_\omega a^\dagger_{\omega'}|\oslash\rangle.$$

Příklad 12:

Ověřte, že dvoufotonový stav má právě dva fotony

$$\hat{N}|2_\beta\rangle = 2|2_\beta\rangle.$$

Příklad 13:

Ověřte, že

$$G_E(t_1,t_2) = \langle 2_\beta|a^\dagger(t_1)a(t_2)|2_\beta\rangle = \int dt\beta^*(t_2,t)\beta(t,t_1),$$

$$G_I(t_1,t_2) = \langle 2_\beta|a^\dagger(t_1)a^\dagger(t_2)a(t_2)a(t_1)|2_\beta\rangle = 2|\beta(t_1,t_2)|^2.$$

Diskutujte význam symetrie $\beta(t_1,t_2) = \beta(t_2,t_1)$.

Příklad 14:

Předpokládáme emisi dvou fotonů do různých směrů popsaný vlnovou funkcí

$$|\psi\rangle = \int d\omega d\omega'\beta(t,t')a_1^\dagger(t)a_2^\dagger(t')|\oslash\rangle$$

přivedené na různé strany polopropustného zrcátka. Pravděpodobnost změření obou fotonů ve stejném výstupním kanálu je úměrná korelaci druhého řádu

$$P = \frac{1}{16}G_I(t_1,t_2) = \frac{1}{16}\langle 2_\beta|a'^\dagger(t_1)a'^\dagger(t_2)a'(t_2)a'(t_1)|2_\beta\rangle$$

Diskutujte význam symetrie $\beta(t_1,t_2) = \beta(t_2,t_1)$ v tomto případě.

Příklad 15:

Diskutujte typický prostorový obraz down-konverze: Odvoďte phase matching podmínku $k' + k'' = 2k_p$

Příklad 16:

Diskutujte časový obraz down-konverze lorenzovské $\nu(\omega) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+(2\omega-\omega_P)^2}$ a gaussovské $\nu(\omega) = e^{-\frac{(2\omega-\omega_P)^2}{4\sigma^2}}$ spektrální čáry.

3.4 EPR paradox

Příklad 17:

Uvažujte dva od sebe se vzdalující fotony. Charakterizujte (a) čisté stavy či (b) statistické směsi elektromagnetického pole, které splňují:

$$\bar{n}_{1x} = \bar{n}_{1y} = \bar{n}_{2x} = \bar{n}_{2y} = \frac{1}{2}. \qquad \langle n_{1x} n_{2x} \rangle = \langle n_{1y} n_{2x} \rangle = 0.$$

Charakterizujte dále vhodným bezrozměrným parametrem stupeň entanglmentu.

Příklad 18:

Ověřte, že fotonový stav

$$|\psi\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_{1x}^\dagger a_{2y}^\dagger - a_{1y}^\dagger a_{2x}^\dagger \right) |\oslash\rangle$$

je invariantní k rotaci souřadné soustavy kolem osy paprsku, tj. jeho popis se nemění pro transformace typu

$$a_{x'}^\dagger = a_x^\dagger \cos\theta + a_y^\dagger \sin\theta$$

$$a_{y'}^\dagger = -a_x^\dagger \sin\theta + a_y^\dagger \cos\theta$$

Uvědomte si rozdíl oproti neentanglované směsi stavů $a_{1x}^\dagger a_{2y}^\dagger |\oslash\rangle$ a $a_{1y}^\dagger a_{2x}^\dagger |\oslash\rangle$ diskutované v třetím oddíle kapitoly.

Příklad 19:

Zopakujte výpočty kapitoly EPR paradox pro soustavu dvou vzdalujících se částic se spinem 1/2, jejíž stav je popsán vlnovou funkcí

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\uparrow\rangle|2\downarrow\rangle - |1\downarrow\rangle|2\uparrow\rangle)$$

.

Kapitola 4

Kolektivní stavy atomů

Příklad 1:

Uvažte kolektivní stavy dvou atomů vázaných dipól-dipólovou interkcí. Diskutujte radiaci předpokládáme-li rychlé ustanovení termodynamické rovnováhy mezi populacemi zářivého a nezářivého stavu. Dikutujte podobnou úlohu pro lineární řetízek.

Příklad 2:

Diskutujte kolektivní stavy soustavy nestejně orientovaných molekul. (viz. T. Meier et al, J. Phys. Chem. 107,3876 (1997))