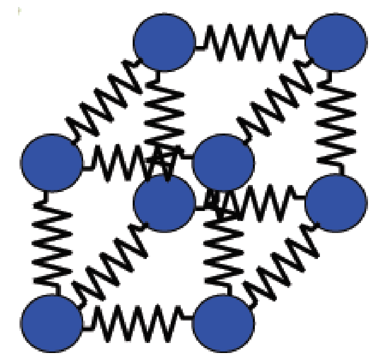
8. Pružnost

Anotace
Pružnost
Zobecněný Hookeův zákon. Základní úloha teorie pružnosti. Tah, smyk, torze, ohyb.

Nauka o pružnosti: zjistit souvislost mezi deformacemi a napětími, které v tělese budí vnější síly



Pružnost

Hledáme vztah mezi napětím a deformací pro elastický materiál.
Elementární řešení:

1. Jednoosý tah/tlak:

a) Poměrné prodloužení: $\varepsilon = (l' - l)/l = \Delta l/l$

$\Delta l = c \cdot F$ kde parametr $c = f(l, S, materiál)$, evidentně: $c \sim l$, $c \sim 1/S \Rightarrow$

$$\Delta l = k\frac{l}{S}F \quad \rightarrow \quad \underbrace{\frac{\Delta l}{l}}_{\varepsilon} = k\underbrace{\frac{F}{S}}_{\sigma}$$

$$\varepsilon = k\sigma_n \quad \rightarrow \quad \boxed{\sigma = E\varepsilon}$$

Hookeův zákon (v elementárním tvaru)
E - Youngův modul pružnosti, k - poddajnost

tj. za předpokladu malých deformací je deformace úměrná přiloženému napětí.

b) Příčné zkrácení: $\eta = -(a' - a)/a = -\Delta a/a$

analogicky: $\eta = k_1\sigma_n$

tedy: $\eta = k_1 E\varepsilon = \upsilon\varepsilon = \dfrac{1}{m}\varepsilon = \dfrac{1}{mE}\sigma_n$ $\quad \boxed{\eta = \dfrac{1}{mE}\sigma_n}$

m - Poissonova konstanta, $\upsilon = 1/m$ Poissonovo číslo

$m = \varepsilon/\eta$ – kolikrát je poměrné prodloužení větší než poměrné zkrácení

Pružnost

Absolutní prodloužení $\ell' = \ell(1+\varepsilon) = \ell\left(1 + \frac{\sigma_n}{E}\right)$

příčné zkrácení $a' = a(1-\eta) = a\left(1 - \frac{\sigma_n}{mE}\right)$

2. Všestranný tlak p:

délka hran po deformaci*): $a' = a(1+\varepsilon-2\eta), \quad b' = b(1+\varepsilon-2\eta), \quad c' = c(1+\varepsilon-2\eta)$

objem po deformaci: $V' = a'b'c' = abc(1+\varepsilon-2\eta)^3 \approx V[1+3(\varepsilon-2\eta)]$

relativní změna objemu: $\frac{V'-V}{V} = \frac{\Delta V}{V} = +3(\varepsilon-2\eta) = +3\left(\frac{1}{E}-\frac{2}{mE}\right)\sigma_n = +\frac{3(m-2)}{mE}\sigma_n$

$\gamma \qquad -p$

Objemová stlačitelnost, def.: $\boxed{\gamma = -\frac{1}{p}\frac{\Delta V}{V}}$

Modul objemové pružnosti: $\boxed{K = \frac{1}{\gamma} = \frac{mE}{3(m-2)} = \frac{E}{3(1-2\upsilon)}}$

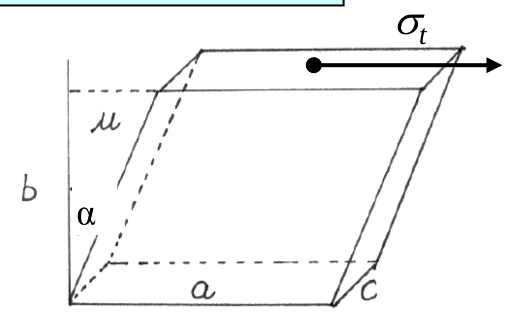
Protože $K > 0 \Rightarrow \quad m > 2, \quad 0 < \upsilon < 1/2$

*) Kdyby tlak působil jen v jednom směru, např. hrany c, hranol by se v tomto směru zkrátil a v ostatních prodloužil. Protože však tlak působí i ve směrech a, b, musíme stejnou úvahu udělat i pro tyto směry.

Pružnost

3. Smyk

tan α ≈ α = $u/b \sim \sigma_t$ ⟶ $\boxed{\sigma_t = G\alpha}$



kde G … modul pružnosti ve smyku (modul torze)

lze odvodit (viz dále): $$G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

⇒ pouze 2 nezávislé parametry popisují deformaci izotropního tělesa (E, m, K, G)

⇒ protože m>2, platí: $$\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}$$

Materiál	E[Nm^{-2}] (Young)	υ (Poisson)	γ[m^{2}N^{-1}] (stlačitelnost)	G[Nm^{-2}] (smyk)
Hliník	$7{,}2.10^{10}$	0,34	$1{,}3.10^{-11}$	$2{,}7.10^{10}$
Měď	$1{,}2.10^{11}$	0,35	$7{,}1.10^{-12}$	$4{,}6.10^{10}$
Železo	$2{,}1.10^{11}$	0,28	$6{,}3.10^{-12}$	$7{,}8.10^{10}$

Zobecněný Hookeův zákon

Lineární teorie pružnosti vycházející z Hookeova zákona předpokládá, že každá složka tenzoru napětí je lineární funkcí všech složek tenzoru deformace:

$$\boxed{\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}}$$

zobecněný Hookeův zákon

$$e_{ij} = \gamma_{ijkl} \sigma_{kl}$$

c_{ijkl} – tenzor pružnosti 4. řádu (elastické koeficienty), 3^4 složek
γ_{ijkl} – elastické konstanty
(3^2 rovnic, celkem 3^4 členů, Einsteinova sumační konvence)

Symetrie v indexech: $i \leftrightarrow j$ a $k \leftrightarrow l$ ...tj. 36 složek
Symetrie po dvojicích: $ij\ kl \leftrightarrow kl\ ij$ (z energ. úvah) $\Rightarrow$ max.21 nezávislých složek

Vyšší symetrie: triklinický krystal – 21 nezávislých složek
kubický krystal – 3 nezávislé složky
izotropní těleso – 2 nezávislé složky (v praxi: E, G)

Zápis c_{ijkl} pomocí <u>kontrakce indexů</u>: dvojici indexů nahradíme jedním indexem podle schématu:
$11 \rightarrow 1$, $22 \rightarrow 2$, $33 \rightarrow 3$, $23 \rightarrow 4$, $13 \rightarrow 5$, $12 \rightarrow 6$ $\Rightarrow$ matice 6×6

Zobecněný Hookeův zákon – izotrpní prostředí

kontrakce indexů:

$11 \to 1,\ 22 \to 2,\ 33 \to 3,\ 23 \to 4,\ 13 \to 5,\ 12 \to 6$

Hookeův zákon při kontrakci indexů (symetrická matice 6x6):

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} \quad \to \quad \sigma_i = C_{ik} e_k$$

6 rovnic

Připomínáme: C_{ij} je symetrická matice (tj. nevypsané členy jsou shodné se členy nad hlavní diagonálou)

Zobecněný Hookeův zákon – izotrpní prostředí

Hookeův zákon pro homogenní izotropní prostředí (tenzor pruž. - symetrická matice 6x6):

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0\\ & & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0\\ & & & 2\mu & 0 & 0\\ & & & & 2\mu & 0\\ & & & & & 2\mu\end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix}e_{11}\\ e_{22}\\ e_{33}\\ e_{23}\\ e_{13}\\ e_{12}\end{bmatrix}$$

6 rovnic

λ, μ - Laméovy koeficienty

Ve složkách: $\boxed{\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}e_I + 2\mu e_{ij}}$ **Zobecněný Hookův zákon** $\longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{ll}\sigma_{ii} = \lambda e_I + 2\mu e_{ii}, & i = j\\ \sigma_{ij} = 2\mu e_{ij}, & i \neq j\end{array}}$

kde $e_I = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ ... 1. invariant tenzoru deformace

$\sigma_I = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ ... 1. invariant tenzoru napětí

$\Rightarrow$ $\boxed{\sigma_I = (3\lambda + 2\mu)e_I}$

Připomínáme: C_{ij} je symetrická matice (tj. nevypsané členy jsou shodné se členy nad hlavní diagonálou)

e_{ii} … poměrná prodloužení délkových elementů, které před deformací měly směr souř.os

Zobecněný Hookeův zákon – tah, smyk, torze, ohyb

Příklady počítané na přednášce (viz Kvasnica – Mechanika):

Př.1. objemová deformace - objem hranolku Δx, Δy, Δz po deformaci:

$$V' = \Delta x(1+e_{11})\Delta y(1+e_{22})\Delta z(1+e_{33}) \cong \Delta x\Delta y\Delta z(1+e_{11}+e_{22}+e_{33}) = V(1+e_{\mathrm{I}}) \quad \text{tedy}$$

$$\boxed{e_I = \frac{V'-V}{V}}$$ objemová dilatace (1. invariant popisuje objemovou změnu, nezávisí na s.s.)

Př.2. všestranný tlak: $\sigma_{\mathrm{ii}} = -p, \quad \sigma_{\mathrm{I}} = -3p$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \frac{1}{K} = -\frac{1}{p}\frac{V'-V}{V} = \frac{3e_I}{\sigma_I} \\ &\text{platí: } \sigma_I = (3\lambda+2\mu)e_I \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{K = (3\lambda+2\mu)/3}$$

Pozn. Oba invarinty <u>ne</u>závisí na s.s. (avšak složky se mění!)

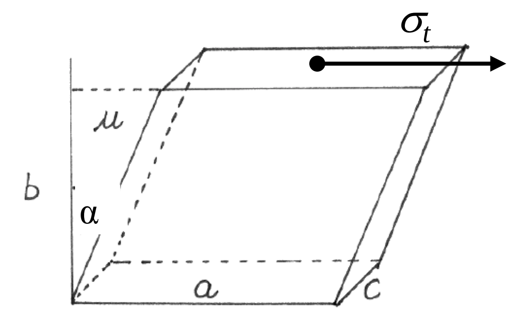
Př.3. Tyč namáhaná tahem, $\boldsymbol{\sigma} \parallel x_1$

$$\boxed{E = \mu\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}} \qquad \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{22} \end{pmatrix}$$

Zobecněný Hookeův zákon – tah, smyk, torze, ohyb

Příklady počítané na přednášce (viz např. Kvasnica – Mechanika)

Př.4. Smyk



$$e_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad e_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}(\alpha + 0) = \frac{\alpha}{2}, \qquad e_{13} = e_{23} = 0$$

$\sigma_6 = 2\mu e_6,$ tj. $\sigma_{12} = 2\mu e_{12} = \mu\alpha$

def.: $\sigma_{12} = G\alpha$ $\Rightarrow$ $\boxed{G = \mu}$

a dle př. 3: $\boxed{\lambda = \dfrac{G(E - 2G)}{3G - E}}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu\alpha & 0 \\ \mu\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & \alpha/2 & 0 \\ \alpha/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Př.5. Torze tyče kruhového průřezu (na cvičení)

moment sil: $M_t = \dfrac{\pi G r^4}{2l}\varphi \equiv D\varphi$

torzní kmity: $J\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi$

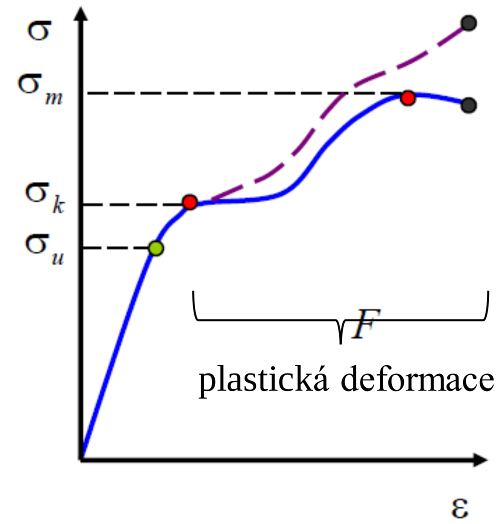
Př.6. Průhyb trámku (na cvičení, viz Kvasnica): $d = \dfrac{Fl^3}{4Eab^3}$

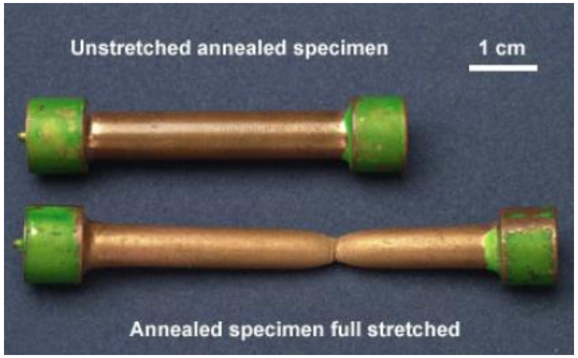
Hookeův zákon

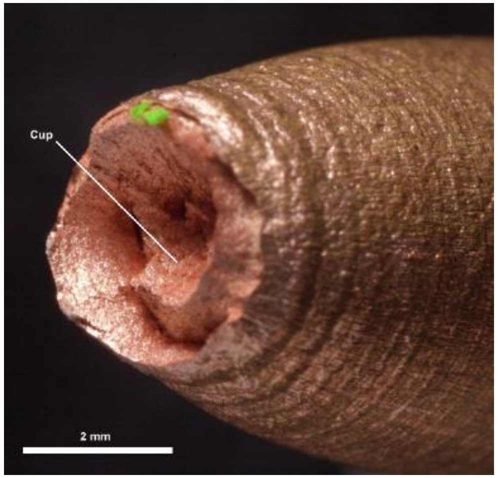
σ_u je mezní napětí, které ještě splňuje Hookeův zákon a nazývá se **mezí úměrnosti**

σ_k je tedy mezní napětí, které ještě nevyvolá trvalou plastickou deformaci. Nazýváme ho **mez pružnosti** (v technické praxi se nazývá **mez kluzu**)

Maximální smluvní napětí, kterého v průběhu deformace dosáhneme, se nazývá mez pevnosti σ_m (často se nazývá **pevnost v tahu**)







Materiál	σ_u [MPa]	σ_m [MPa]
ocel	190-220	380-450
dural	180-200	370
dřevo	25	40
sklo	40-100	80-200
beton	3-25	5-50
zdivo	2-6	3,5-20

Základní úloha

Základní úloha teorie pružnosti: nalézt napětí a deformaci v každém bodě tělesa, známe-li rozložení napětí nebo deformace na povrchu.

Předp.: těleso je po deformaci v rovnováze, hledáme složky σ_{ij} a u_i popsané rovnicemi:

$$\boxed{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + G_j = 0} \qquad \boxed{\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_I + 2\mu e_{ij}}$$

9 ric pro 9 neznámých (neb $e_{ij} \leftrightarrow u_i$)
2 zákl. úlohy – je známo rozložení sil na povrchu tělesa $\sigma(\boldsymbol{r})$
– je známo posunutí bodů na povrchu tělesa $u(x_k)$

Řešení – *viz speciální učebnice*