7. Kontinuum

Anotace

Kontinuum - obecné pojmy.

Kinematika kontinua. Tenzor napětí, tenzor deformace a tenzor rychlosti deformace. Rovnice rovnováhy a pohybová rovnice kontinua.

Studium – **pohybu tekutin** (kapaliny, plyny)
– deformační chování látek **- elastické × plastické**

Makroskopický (fenomenologický) popis

Spojité prostředí:
- **Průměrné hodnoty veličin** v okolí vyšetřovaného bodu
- Neprojevuje se struktura látek
- Částice (element) kontinua
- Pohyb kontinua/deformace – dochází ke **změně vzájemných vzdáleností částic**

Kontinuum

<u>model kontinua</u> (model **spojitého prostředí**) :

a) **prostor** je spojitý (**souvislá množina** M_G **geometrických bodů** B_G)

b) každé těleso je spojité (můžeme je chápat jako souvislou množinu M_M **materiálových bodů** B_M)

<u>Axiom kontinuity:</u>

V každém okamžiku je <u>každému bodu prostoru přiřazen materiálový bod</u>

Diskrétní model	×	Spojitý model
vlastnosti látky na poloze jsou vyjádřeny diskrétními hodnotami		vlastnosti látky na poloze jsou vyjádřeny spojitými funkcemi

Popis kontinua

2 typy přístupů:

dvě odlišné referenční soustavy

- **I. Eulerova metoda**

V prostoru si vybereme **jeden pevný bod** B_G a **sledujeme vlastnosti** (např. rychlost, zrychlení, teplotu, tlak) **různých materiálových bodů** B_M **v daném bodě prostoru** v různých časových okamžicích. (látka se pohybuje prostorem a deformuje se).

$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) \qquad x_i = x_i(X_j, t) \quad i = 1,2,3$$

Eulerovy souřadnice

př.použití: popis proudění kapalin, plynů (počasí)

- **II. Lagrangeova metoda**

částici kontinua

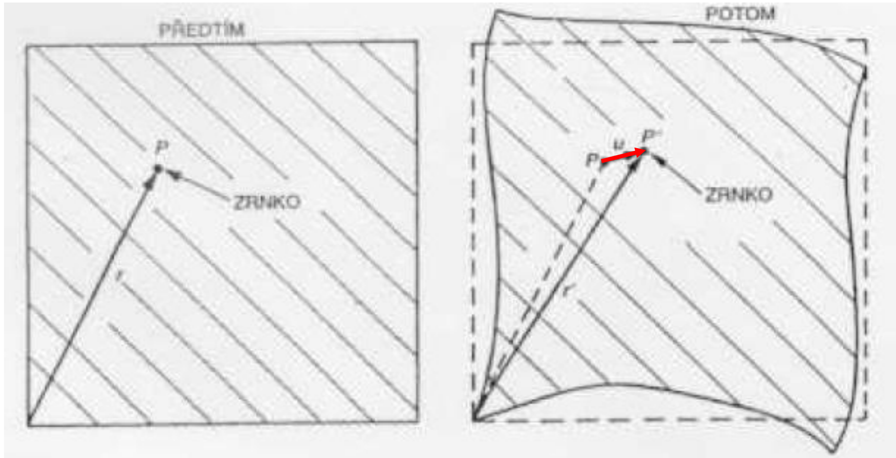
Vybereme si **jeden materiálový bod** B_M a **sledujeme jeho pohyb v čase** (změny polohy, trajektorii, rychlost, zrychlení) a **změny jeho vlastností** (např. změny teploty, tlaku,…).

$$\vec{R} = (X_1, X_2, X_3) \qquad X_j = X_j(x_i, t) \quad j = 1,2,3$$

Lagrangeovy souřadnice

př.použití: popis deformace

Deformace kontinua



Zrnko látky v bodě P nedeformovaného bloku se při deformaci přemístí do bodu P'

Každý materiálový bod se posouvá jiným způsobem, mění se vzájemná vzdálenost jednotl. bodů kontinua

Deformace kontinua

spojité prostředí může konat **translaci, rotaci** a **může se deformovat**

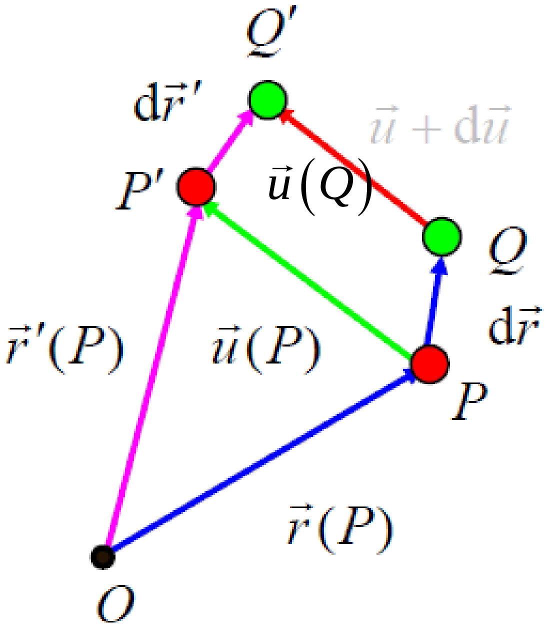
vektor posunutí - rozdíl polohových vektorů před a po deformaci

$$\boxed{\vec{u}(P) = \vec{r}\,'(P) - \vec{r}(P)}$$

$$\vec{u}(Q) + d\vec{r} = \vec{u}(P) + d\vec{r}\,'$$

$$\boxed{\vec{u}(Q) = \vec{u}(P) + \mathrm{d}\vec{u}}$$

deformace kontinua



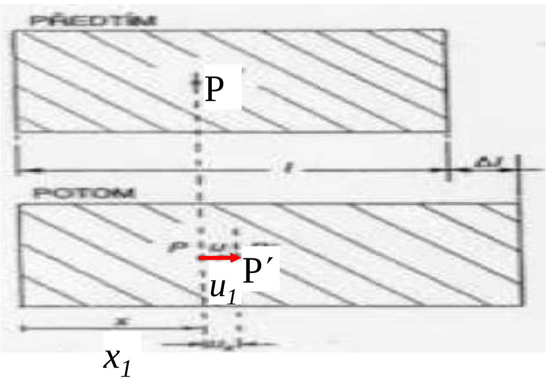
r průvodič vybraného bodu v nedeformovaném tělese

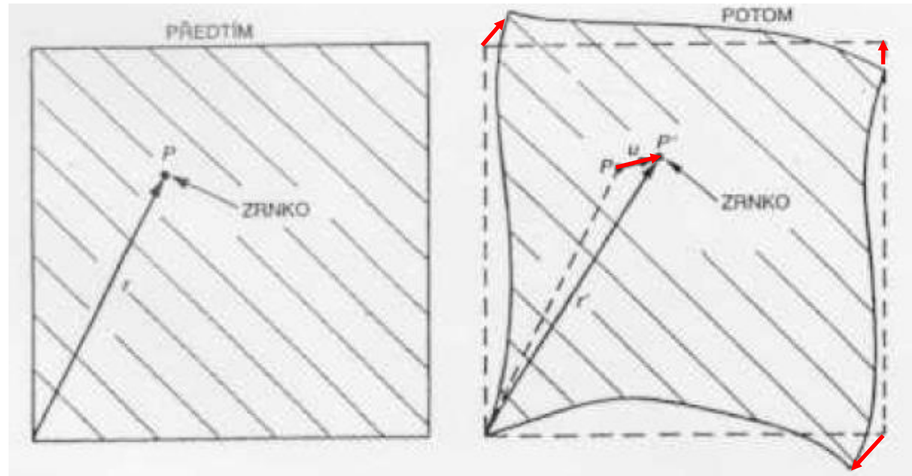
r´ průvodič stejného bodu v deformovaném tělese

u = *f*(***r***) … posunutí je závislé na souřadnicích (mění se místo od místa, jinak posunutí jako celku)

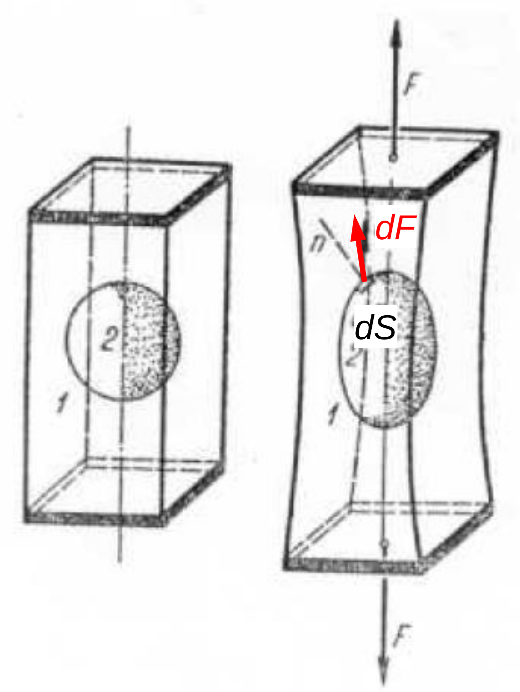
Mění se vzájemná vzdálenost jednotl.bodů kontinua

Deformace kontinua – síly v kontinuu





Zrnko látky v bodě P nedeformovaného bloku se při deformaci přemístí do bodu P'



- Kontinuum je v rovnováze → na každé plošce je síla působící z jedné strany kompenzována stejnou silou působící z 2.strany
- V osách elipsoidu – síly kolmé k povrchu → působí pouze **normálová napětí**
- V ostatních směrech existují jak normálové tak **tečné složky** (**tečná napětí**), tečné složky způsobují změnu tvaru tělesa, viz dále
- Pozn. napětí mezi sousedními částicemi (tj. vnitřní elestické síly) drží látku pohromadě

Síly v kontinuu

Síly působící v kontinuu:

1. Vnitřní × vnější
2. **Objemové × povrchové (plošné)**

Objemové (~ *m*)

Povrchové (plošné)

Síly dlouhého dosahu (síly objemové)	×	**Síly krátkého dosahu (síly povrchové)**

působí bezprostředně na velké vzdálenosti (např. gravitační síla**)**

působí na celý objem (a nikoli pouze na jeho povrch) vyšetřovaného objektu

působí nezávisle na silách, působících na sousední elementy

působí pouze mezi nejbližšími molekulami (molekulární síly).

vnější síla působí pouze na molekuly tvořící povrch zkoumaného tělesa (**povrchové síly) - např**. **tlak, tření** atd.

účinek povrchových sil ovšem nekončí na povrchu tělesa

Plošné síly

Plošné (povrchové) síly → jsou zodpovědné za deformaci kontinua

- Při deformaci kontinua dojde tedy ke změně rovnovážné polohy částic, což má za následek **vznik sil mezi částicemi**, které se snaží kontinuum vrátit do původního stavu.
- Deformované kontinuum se dostává do stavu **napjatosti**. Charakterizujeme jej veličinou, která se nazývá **napětí** (viz obr. – trojosý elipsoid v deformovaném tělese)
- Náhrada vnitřního působení → působením vnějším (lze kvantifikovat)

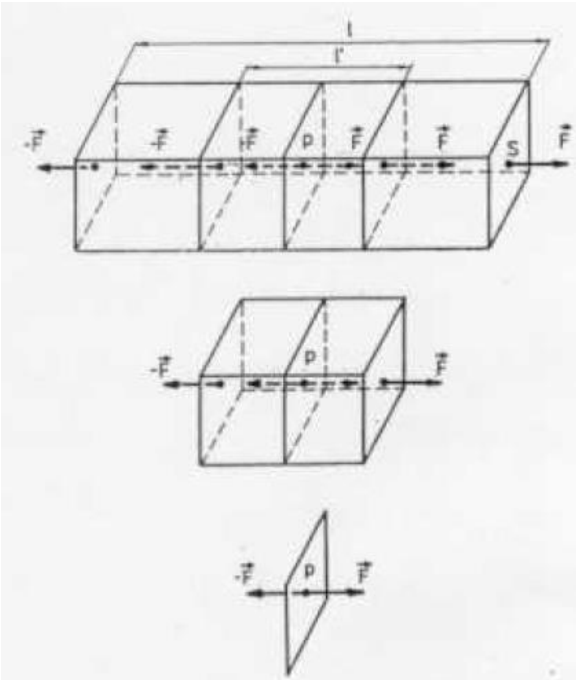
plošná hustota povrchové síly (vektor napětí) $\vec{\sigma}$ ⟹ **síla působící na jednotkovou plochu povrchu**

Napětí … 1 N/m²=1 Pa

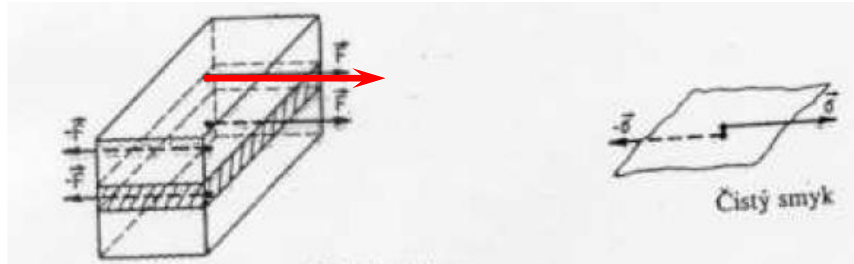
$$\boxed{\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}_P}{dS}}$$

napětí v příslušném místě myšlené plochy, která odděluje navzájem různé části kontinua v napjatém stavu

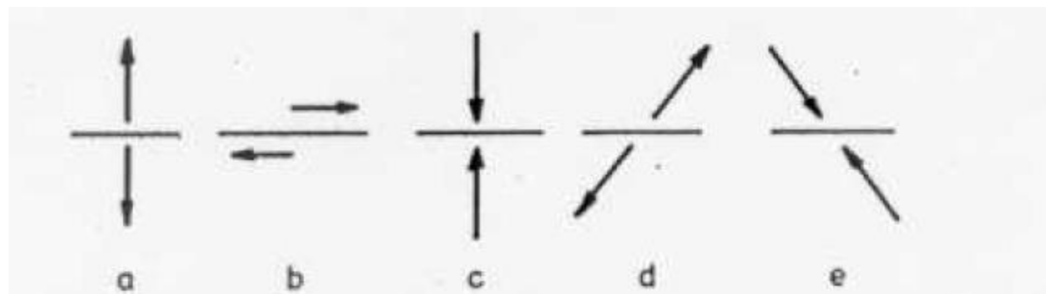
Plošné síly



Obr. 8.6 Napětí na ploše *p* kolmé k ose tyče



Přenášení smykového namáhání kvádrem



Schematické znázornění různých typů napětí: *a)* čistý tah, *b)* čistý smyk, *c)* čistý tlak *d)* obecné tahové napětí, *e)* obecné tlakové napětí

<u>**Napětí**</u>

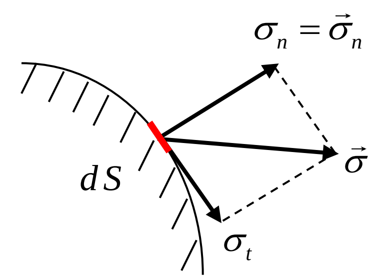
- **přenáší se na plochu** *S* (libovolně zvolenou)
- **nezávisí na tom, jak je síla realizována** - v dostatečné vzdálenosti od působiště ji můžeme nahradit silou vnější (**Saint Venantův princip**)

Síly v kontinuu

Obecně působí elementární síla ***dF*** v libovolném směru vzhledem k normále ***n*** příslušného elementu plochy *dS*.

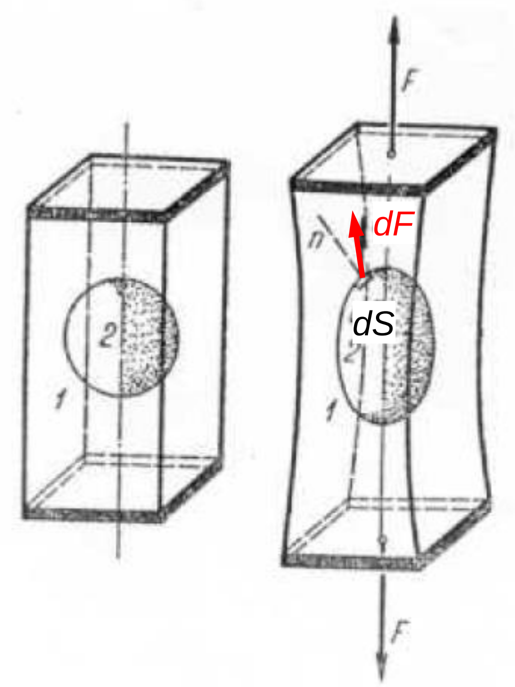
Rozklad $\rightarrow$ **normálové napětí** $\vec{\sigma}_n = \dfrac{d\vec{F}_n}{dS}$

tečné napětí $\vec{\sigma}_t = \dfrac{d\vec{F}_t}{dS}$



- Normálové napětí – **tah/tlak** na plošce *dS* dvou částí kontinua
- Tečné napětí – způsobuje **změnu tvaru** jednotlivých elementů namáhaného kontinua

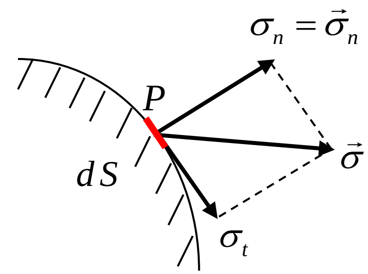
Pozn. K přechodu v elipsoid je třeba, aby normálová napětí v jednotlivých místech plochy byla <u>různě</u> veliká → s tím přímo souvisí přítomnost tečných napětí



- V osách elipsoidu – síly kolmé k povrchu → **hlavní napětí**
- V ostatních směrech existují jak normálové tak tečné složky

Síly v kontinuu

dS – lib.ploška vytknutá v kontinuu: plošná síla ***dF*** i příslušné napětí **σ** = ***dF****/dS* budou mít obecnou orientaci vůči této plošce



Znaménková konvence: pro uzavřenou plochu je

σ > 0 pokud míří ven (tah)

σ < 0 pokud míří dovnitř (tlak)

Daným bodem kontinua lze vést libovolný počet plošek *dS*

Napětí **σ závisí i na orientaci plošky**, tedy

$$\boxed{\vec{\sigma} = f\left(\text{polohy, orientace plošky}\right)}$$

Tedy existuje ∞ mnoho plošek v bodě P ⇒ ∞ mnoho různých napětí v tomto bodě

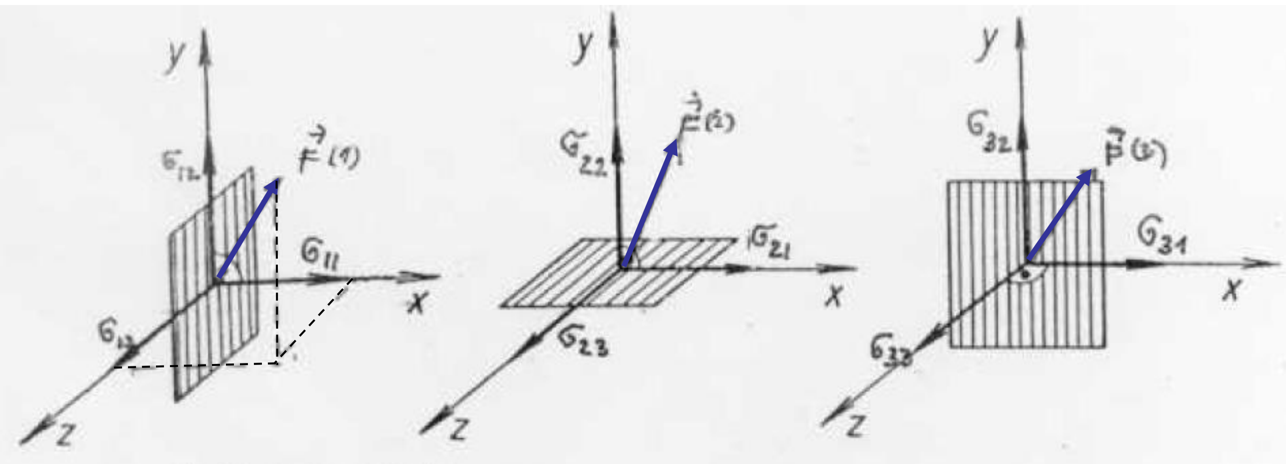
Úloha: je-li známo napětí na některých z těchto plošek, vypočítat napětí v obecném směru a deformaci tělesa.

… řešitelné, pokud známe napětí na třech různých (nejlépe kolmých) ploškách:

Tenzor napětí

Postup: - zvolíme postupně 3 kolmé směry v bodě P kolmé k osám souřadnic
- na každé plošce provedeme rozklad do směru os
- složky napětí označíme dvěma indexy (odp. směru plochy a směru síly, viz. níže)

$$\boxed{\sigma_{ij} = \frac{\Delta F_j^{(i)}}{\Delta S_i}}$$



Složky tenzoru napětí

$$\sigma_{ij}$$

„index síly“ (směr, v němž působí složka síly)

„index plochy“ (směr kolmice na plochu)

a) ploška $\perp x_1$, $\Delta S_1 = \Delta x_2 . \Delta x_3$:

$$\sigma_{11} = \Delta F_1^{(1)} / \Delta S_1$$
$$\sigma_{12} = \Delta F_2^{(1)} / \Delta S_1$$
$$\sigma_{13} = \Delta F_3^{(1)} / \Delta S_1$$

b) ploška $\perp x_2$, $\Delta S_2 = \Delta x_1 . \Delta x_3$:

$$\sigma_{21} = \Delta F_1^{(2)} / \Delta S_2$$
$$\sigma_{22} = \Delta F_2^{(2)} / \Delta S_2$$
$$\sigma_{23} = \Delta F_3^{(2)} / \Delta S_2$$

c) ploška $\perp x_3$, $\Delta S_3 = \Delta x_1 . \Delta x_2$:

$$\sigma_{31} = \Delta F_1^{(3)} / \Delta S_3$$
$$\sigma_{32} = \Delta F_2^{(3)} / \Delta S_3$$
$$\sigma_{33} = \Delta F_3^{(3)} / \Delta S_3$$

Pozn. připomínáme, že síla závisí na orientaci plošky, tedy $\boldsymbol{F}^{(1)} \neq \boldsymbol{F}^{(2)} \neq \boldsymbol{F}^{(3)}$

Tenzor napětí

Tenzor napětí:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \longleftarrow$$

1. řádek = **napěťový vektor** (síla) působící na 1. stěnu, tj. síla $\boldsymbol{F}^{(1)}/\Delta S_1$, atd….

$$\sigma_{ij} = \frac{\Delta F_j^{(i)}}{\Delta S_i} \quad \rightarrow \quad \boxed{\sigma_{ij} = \frac{\partial F_j^{(i)}}{\partial S_i}}$$

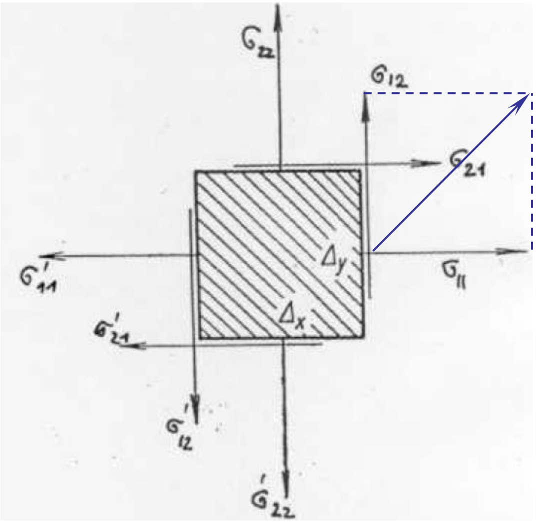
Pozn.: 9 čísel σ_{ij}

- se **vztahuje ke zvolenému bodu** P v napjatém tělese, tj. $\sigma_{ij} = f(\boldsymbol{r})$, <u>mění se bod od bodu</u>, hodnoty závisí i na orientaci plošky / s.s.
- stačí k úplnému popisu vnitřního napětí

Tenzor napětí

<u>Fyzikální význam</u>:

! σ_{ii} (diagonální složky) – **tah** ($\sigma_{ii} > 0$) resp. **tlak** ($\sigma_{ii} < 0$)
σ_{ij} , $i \neq j$, (mimodiagon.složky) – **smyk (torze)**



Malá (infinitezimální) krychlička, tj. na stěnách homogenní napětí, v limitě všechny plošky procházejí počátkem

<u>Rovnováha</u> deformovaného tělesa:
- normálové složky: rovnováha sil: $\sigma_{11} = -\sigma'_{11}$ atd. $\sigma_{ij} = -\sigma'_{ij}$
- smykové složky – rovnováha momentů sil:

$$M_3 = \frac{1}{2}\left(a\sigma_{12} - a\sigma_{21}\right)a^2 = 0 \quad \text{tj. } \sigma_{12}=\sigma_{21}\text{, atd.}$$

$\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}$ **symetrický tenzor 2.řádu**

$\Rightarrow$ Geometrická interpretace pomocí elipsoidu – **3 hlavní osy** $\rightarrow$ pro plochy kolmé na osy napětí je **čistým tahem / tlakem**

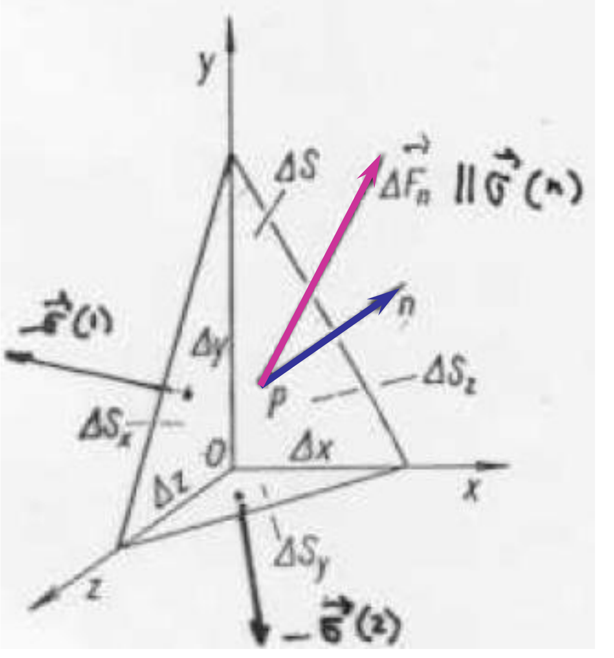
Tenzorové pole – každému bodu kontinua přiřazeno 6 čísel, mění se od bod u k bodu
Pozn. zvláštní typ tenzoru – vztahuje se k působícím silám, může mít lib.směr v látce

(× materiálové tenzory J, ε, μ ... - odráží symetrii systému a mají definovanou orientaci v krystalu, pro izotropní krystaly to jsou skaláry)

Vektor napětí

Hledáme **velikost vektoru napětí** na ploše určenou směrem jednotk. vektoru $\boldsymbol{n} = (a_1,a_2,a_3)$, kde $a_i \equiv \cos \alpha_i$

$$\Delta S_1 = \Delta S a_1, \quad \Delta S_2 = \Delta S a_2, \quad \Delta S_3 = \Delta S a_3$$



Rovnováha na čtyřstěnu: síly působící na jeho 4 stěny
objemové síly zanedbáme ($\sim \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$)
plošné síly v rovnováze ($\sim \Delta x_1 \Delta x_2$):

$$F_1^{(n)} = \sigma_{11}\Delta S_1 + \sigma_{21}\Delta S_2 + \sigma_{31}\Delta S_3 = \left(\sigma_{11}a_1 + \sigma_{21}a_2 + \sigma_{31}a_3\right)\Delta S$$

$$F_2^{(n)} = \sigma_{12}\Delta S_1 + \sigma_{22}\Delta S_2 + \sigma_{32}\Delta S_3 = \left(\sigma_{12}a_1 + \sigma_{22}a_2 + \sigma_{32}a_3\right)\Delta S$$

$$F_3^{(n)} = \sigma_{13}\Delta S_1 + \sigma_{23}\Delta S_2 + \sigma_{33}\Delta S_3 = \left(\sigma_{13}a_1 + \sigma_{23}a_2 + \sigma_{33}a_3\right)\Delta S$$

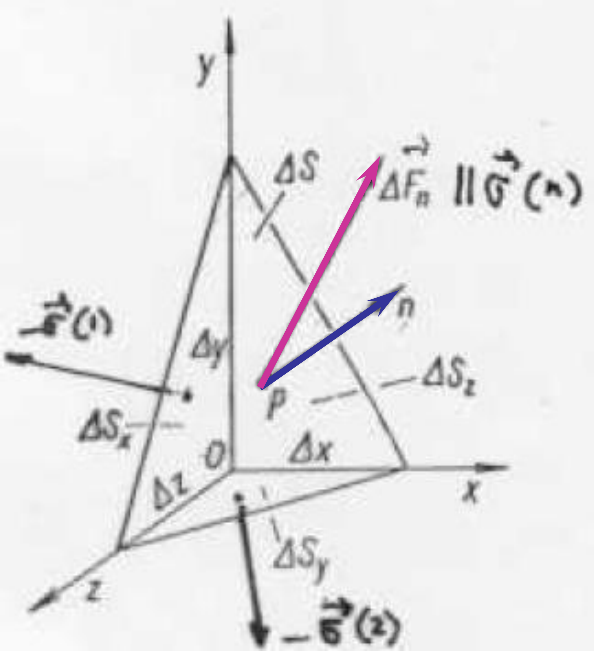
Složky **vektoru napětí**:

$$\frac{F_1^{(n)}}{\Delta S} \equiv \sigma_1^{(n)} = \sum \sigma_{i1} a_i$$ atd. pro další složky

Pozn. k obrázku: Působí-li napjaté kontinum v ploše ΔS na čtyřstěn silou ΔF_n, budou v rovnovážném stavu její složky stejně velké jako součet opačně orientovaných sil, jimiž v příslušném směru působí obklopující kontinuum na čtyřstěn v ostatních ploškách ΔSx, ΔSy, ΔSz

Vektor napětí

Hledáme **velikost vektoru napětí** na ploše určenou směrem jednotk. vektoru $\boldsymbol{n} = (a_1, a_2, a_3)$



$$\frac{F_1^{(n)}}{\Delta S} \equiv \sigma_1^{(n)} = \sum \sigma_{i1} a_i$$ atd. pro další složky, tedy:

ve složkách: $$\boxed{\sigma_j^{(n)} = \sigma_{ij} a_i}$$

pozn.: používáme Einsteinovo sumační pravidlo

(složky **vektoru napětí** ve směru $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$)

maticový zápis: $$\boxed{\vec{\sigma}^{(\vec{n})} = \hat{\sigma}^T \vec{n}}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^{(n)} \\ \sigma_2^{(n)} \\ \sigma_3^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Př.: pro $\boldsymbol{n} = (1,0,0)$: $\sigma_1^{(n)} = \sigma_{11}, \sigma_2^{(n)} = \sigma_{12}, \sigma_3^{(n)} = \sigma_{13}$ tedy $\vec{\sigma}^{(n)} = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$ ... (1. řádek tenzoru)

Pozn. Diagonalizace tenzoru – fyzikálně najít v daném bodě směry, kdy napětí je čistým tahem/tlakem – hlavní napětí (hlavní osy) – řešení sekulární rovnice

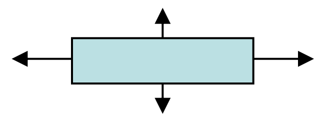
Tenzor napětí

Příklady:
Jednoosé napětí

$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2-osé napětí

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



3-osé
(hydrstat.tlak)

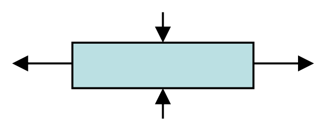
$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad p > 0$$

(v tekutině jsou smyková napětí = 0)

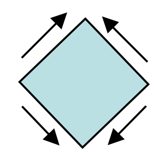
Smyková napětí

$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

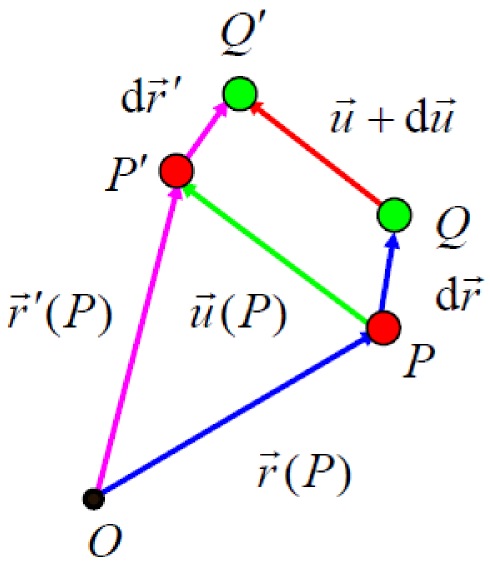


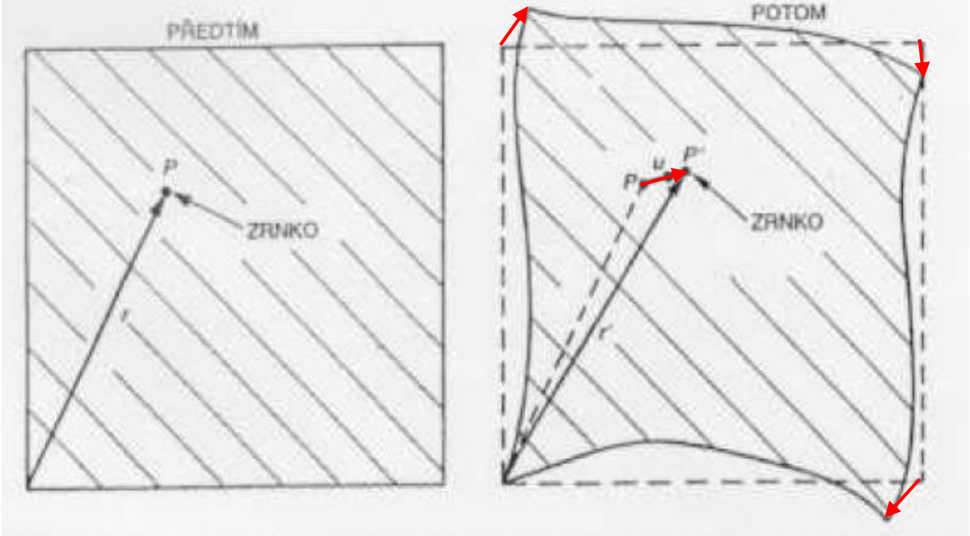
torze

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Deformace





Zrnko látky v bodě P nedeformovaného bloku se při deformaci přemístí do bodu P'

V důsledku napjatosti tělesa vznikají deformace, obecně různé v každém bodě tělesa

Vektor posunutí: $\boxed{\vec{u} = \vec{r}\,' - \vec{r}}$

$$u_i = x_i' - x_i$$ **…** posunutí ve směru *i*

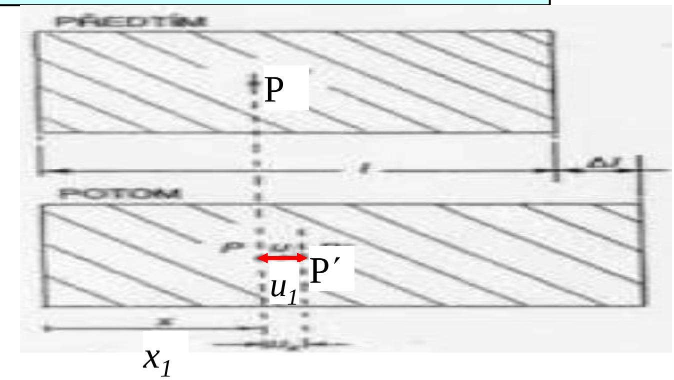
r průvodič vybraného bodu v <u>ne</u>napjatém tělese
***r*´** průvodič stejného bodu v napjatém tělese
u = *f*(***r***) … posunutí je závislé na souřadnicích (mění se místo od místa, jinak posunutí jako celku)

Tenzor deformace

A) Jednoosý tah

(deformace tenké tyče, v celé tyči stejná):

$$\frac{\Delta l}{l} \equiv \frac{u_1}{x_1} = \varepsilon_{11}$$



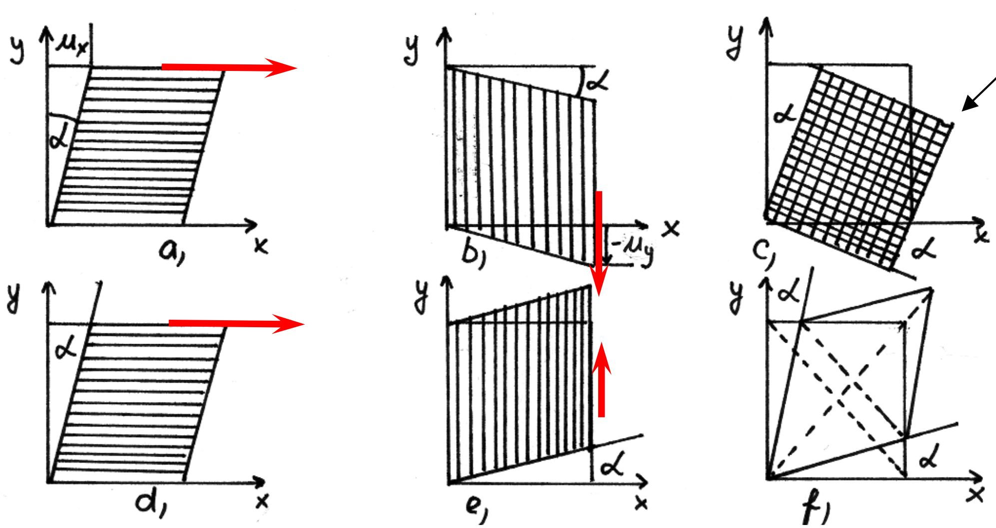
Deformace tyče při prostém tahu.

Lokální deformace v bodě P:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \qquad \text{obecně:} \quad \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

… relat.změna délky elementu ve směru osy *i*

B) Smyková deformace



prostá rotace

Smyková deformace

Deformace hranolu při prostém smyku.

Tenzor deformace

Smyková deformace

$$\tan\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} = \frac{u_1}{x_2} = \varepsilon_{12} \qquad \frac{\alpha}{2} = \frac{u_2}{x_1} = \varepsilon_{21}$$

Lokální deformace v bodě P: $\varepsilon_{12} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}$ $\quad \varepsilon_{21} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}$ atd.

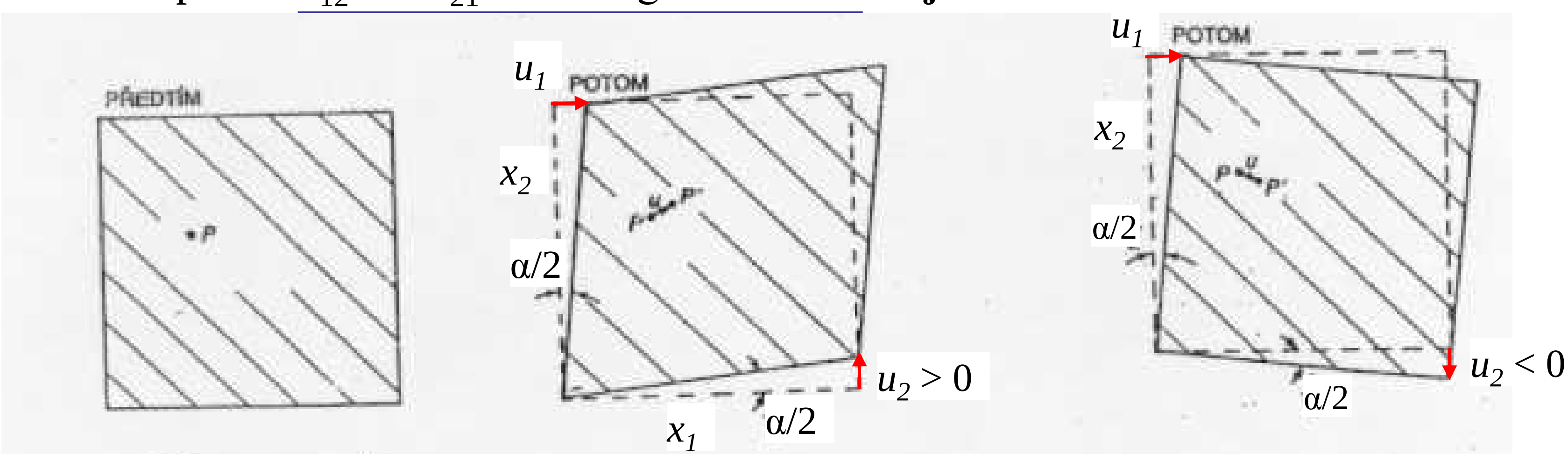
Obecně: $\boxed{\varepsilon_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}}$

ε_{ij}

normála ke směru posunutí

směr posunutí

Pozor: pokud $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21}$… homogenní rotace ⇒ **jak odlišit rotaci od deformace**?



Homogenní deformace ve smyku

Homogenní rotace bez deformace

Tenzor deformace

Definuji: $e_{ij} = (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji})/2$, neboli:

tenzor malých deformací: $$\boxed{e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}$$ $$e = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix}$$

Symetrický tenzor, platí: $e_{ij} = e_{ji}$

Evidentně pro homogenní rotaci: $e_{ij} = 0$ (neboť $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21}$)

<u>**Fyzikální význam**</u>:

e_{ii} … **relat.změna délky** elementu ve směru, který byl původně ve směru *i*

e_{ij} …**smykový úhel** ($\alpha_{ij}/2$) o který se deformací změní původně pravý úhel mezi elementy původně || x_1 a x_2

Shrnutí: **čísla e_{ij} udávají jak se změní délky v diferenciálním okolí daného bodu *r***

Hodnoty e_{ij} se mění bod od bodu – tenzorové pole deformací

Tenzor rychlosti deformace

Závislost deformace na čase:

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x_j}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = D_{ij}$$

tenzor rychlosti deformace

kde $v_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial t}$ **- rychlost posunutí**

Rychlost v diferenciálním okolí lib.bodu x_j:

$$v_i\left(x_j + dx_j, t\right) = v_i\left(x_j, t\right) + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j + \ldots \equiv \underbrace{v_i\left(x_j, t\right)}_{\text{rychlost translace}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) dx_j}_{\text{rychlost rotace}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) dx_j}_{\text{rychlost deformace s jakou se mění vzdálenost částic v okolí bodu } x_j}$$

(pohyb kontinua jako celku)

Helmholtzova věta:
Pohyb kontinua v okolí lib.bodu lze rozložit na pohyb translační, rotační a deformační

Pozn. V případě existence všech konečných derivací funkce v bodě *a*, Taylorův rozvoj:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Operátor rotace

Operátor rotace:

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \left[\nabla \times \vec{v}\right]$$

Ve složkách: $\left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right)_1 = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)$ ... atd.

kde $\vec{v}$ je lib.vektor a $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$

rotační (vírový) pohyb v kontinuu resp. tekutině

Rovnice rovnováhy kontinua

Podmínka rovnováhy sil na kvádru konečného objemu:

$$\left(\vec{\sigma}^{(1)}-\vec{\sigma}'^{(1)}\right)a_2a_3+\left(\vec{\sigma}^{(2)}-\vec{\sigma}'^{(2)}\right)a_3a_1+\left(\vec{\sigma}^{(3)}-\vec{\sigma}'^{(3)}\right)a_1a_2+\vec{G}a_1a_2a_3=0$$

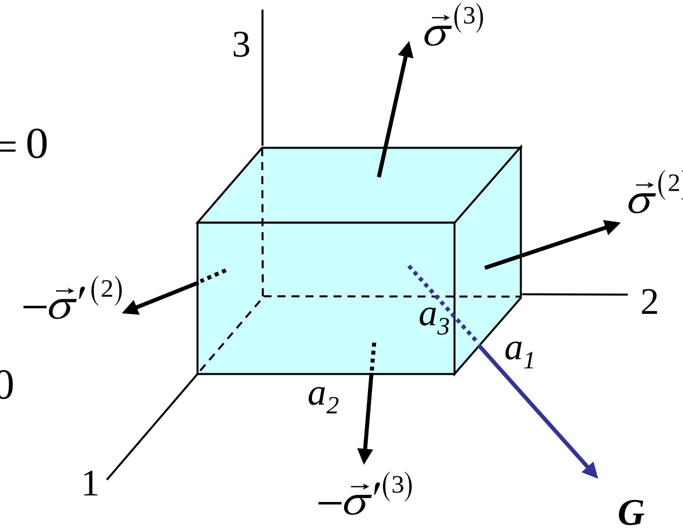
kde: $\vec{\sigma}^{(1)}=(\sigma_{11},\sigma_{12},\sigma_{13})$... napěťový vektor působící na 1. stěnu

ve složkách (3 rce pro složky j=1,2,3):

$$\left(\sigma_{1j}-\sigma'_{1j}\right)a_2a_3+\left(\sigma_{2j}-\sigma'_{2j}\right)a_3a_1+\left(\sigma_{3j}-\sigma'_{3j}\right)a_1a_2+G_ja_1a_2a_3=0$$

věta o střední hodnotě (v limitě ⟶ derivace):

$$\sigma_{11}-\sigma'_{11}=\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}a_1 \quad \text{tj.} \quad \sigma_{ij}-\sigma'_{ij}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}a_i$$



G = ***F***/*V* ... **<u>objemová síla</u>**
(působící na jednotku objemu)

Rovnice rovnováhy kontinua:

$$\boxed{\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}+G_j=0}$$

Pohybová rovnice kontinua (v diferenciálním tvaru):

$$\boxed{\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}+G_j=\rho\frac{d^2u_j}{dt^2}}$$

ve složkách: $\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}+G_1=0,$ atd.

$$\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix}$$

pozn. užíváme Einsteinovu sčítací konvenci (tj. suma přes i)

Pohybová rovnice kontinua

<u>Rovnováha</u> kontinua nastane, bude-li výslednice všech vnějších sil (objemových i plošných) působících na dané kontinuum nulová:

$$\vec{F}_V + \vec{F}_S = 0$$

Při nenulové výslednici bude mít element kontinua zrychlení ***a***

$$\vec{F}_V + \vec{F}_S = m\vec{a}$$

Pro objem V kontinua uzavřený plochou S a hustoty ρ:

$$\boxed{\int_V \rho \vec{E} dV + \oiint_{S(V)} \vec{\sigma} dS = \int_V \rho \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} dV}$$

Pohybová rovnice kontinua
v integrálním tvaru

celk.objemová síla o intenzitě ***E***

celková plošná síla

součet součinů hmotnosti a zrychlení všech elementů oblasti V