7. Kontinuum

Anotace

Kontinuum - obecné pojmy.

Kinematika kontinua. Tenzor napětí, tenzor deformace a tenzor rychlosti deformace. Rovnice rovnováhy a pohybová rovnice kontinua.

Studium – **pohybu tekutin** (kapaliny, plyny)
– deformační chování látek - **elastické × plastické**

Makroskopický (fenomenologický) popis

Spojité prostředí:
- **Průměrné hodnoty veličin** v okolí vyšetřovaného bodu
- Neprojevuje se struktura látek
- Částice (element) kontinua
- Pohyb kontinua/deformace – dochází ke **změně vzájemných vzdáleností částic**

Kontinuum

⊕ **<u>model kontinua</u>** (model **spojitého prostředí**) :

a) **prostor** je spojitý (**souvislá množina** M_G **geometrických bodů** B_G)

b) každé těleso je spojité (můžeme je chápat jako souvislou množinu M_M **materiálových bodů** B_M)

<u>Axiom kontinuity:</u>

V každém okamžiku je <u>každému bodu prostoru přiřazen materiálový bod</u>

Diskrétní model **Spojitý model**

vlastnosti látky na poloze jsou vyjádřeny diskrétními hodnotami

vlastnosti látky na poloze jsou vyjádřeny spojitými funkcemi

Popis kontinua

2 typy přístupů:

dvě odlišné referenční soustavy

- **I. Eulerova metoda**

V prostoru si vybereme **jeden pevný bod** B_G a **sledujeme vlastnosti** (např. rychlost, zrychlení, teplotu, tlak) **různých materiálových bodů** B_M **v daném bodě prostoru** v různých časových okamžicích. (látka se pohybuje prostorem a deformuje se).

$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) \qquad x_i = x_i(X_j, t) \quad i = 1,2,3$$

Eulerovy souřadnice

př.použití: popis proudění kapalin, plynů, počasí

- **II. Lagrangeova metoda**

částici kontinua

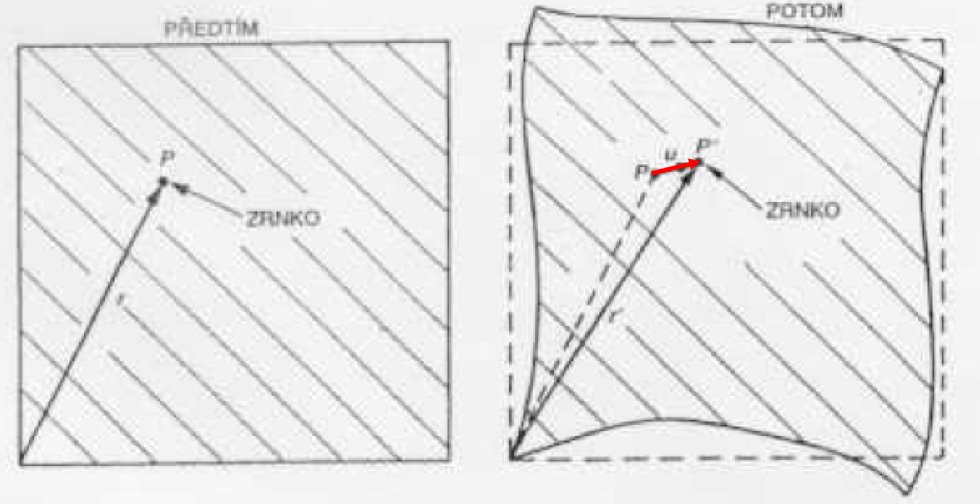
Vybereme si **jeden materiálový bod** B_M a **sledujeme jeho pohyb v čase** (změny polohy, trajektorii, rychlost, zrychlení) a **změny jeho vlastností** (např. změny teploty, tlaku,…).

$$\vec{R} = (X_1, X_2, X_3) \qquad X_j = X_j(x_i, t) \quad j = 1,2,3$$

Lagrangeovy souřadnice

př.použití: popis deformace

Deformace kontinua



Zrnko látky v bodě P nedeformovaného bloku se při deformaci přemístí do bodu P'

Každý materiálový bod se posouvá jiným způsobem, mění se vzájemná vzdálenost jednotl. bodů kontinua

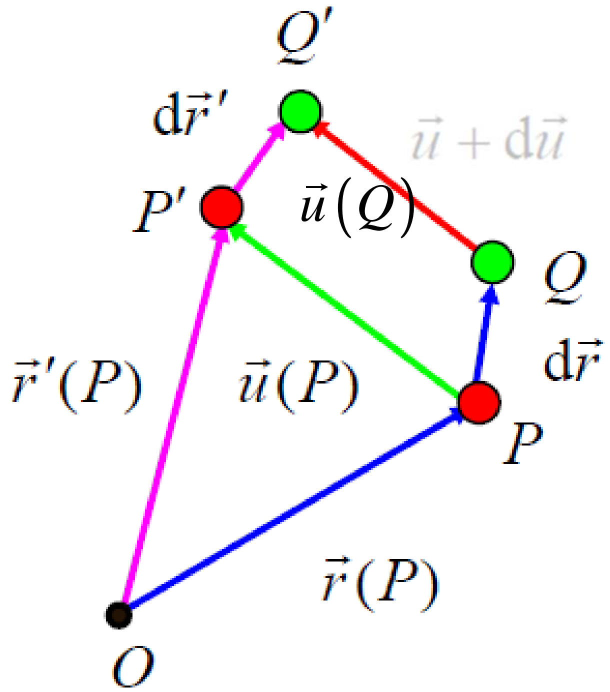
Deformace kontinua

spojité prostředí může konat **translaci, rotaci** a **může se deformovat**

vektor posunutí - rozdíl polohových vektorů před a po deformaci

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{\vec{u}(P) = \vec{r}\,'(P) - \vec{r}(P)} \\ &\vec{u}(Q) + d\vec{r} = \vec{u}(P) + d\vec{r}\,' \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\vec{u}(Q) = \vec{u}(P) + \mathrm{d}\vec{u}}$$

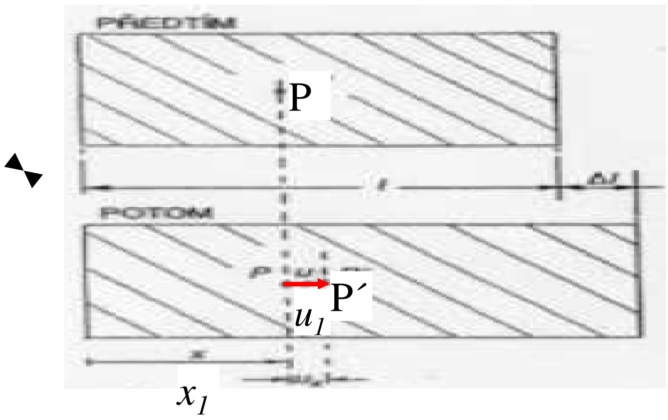
deformace kontinua

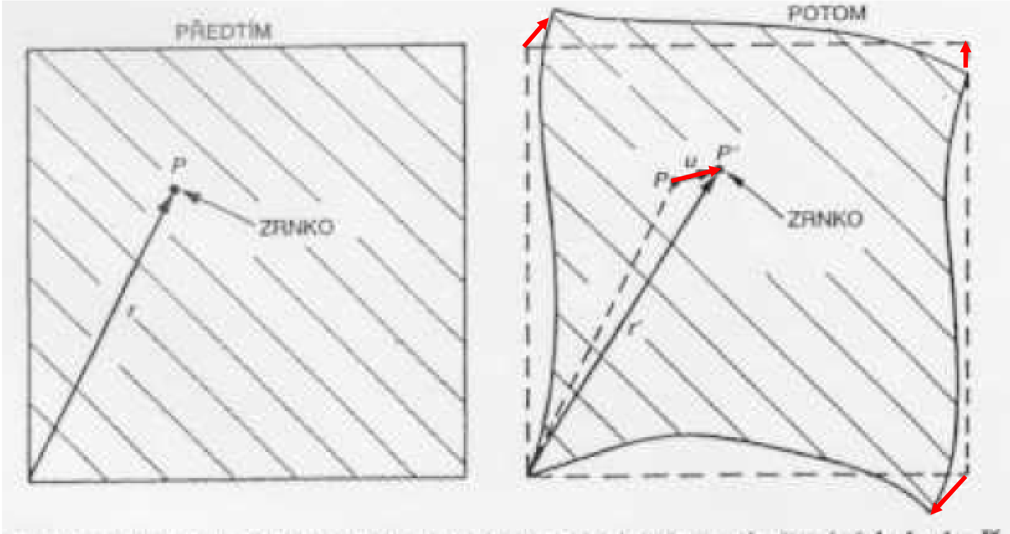


r průvodič vybraného bodu v nedeformovaném tělese
r´ průvodič stejného bodu v deformovaném tělese
u = *f*(***r***) … posunutí je závislé na souřadnicích (mění se místo od místa, jinak posunutí jako celku)

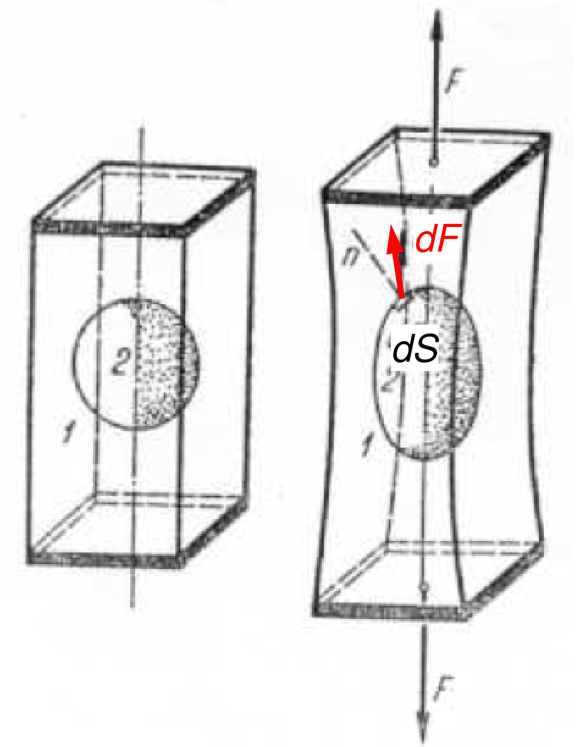
Mění se vzájemná vzdálenost jednotl.bodů kontinua

Deformace kontinua – síly v kontinuu





Zrnko látky v bodě P nedeformovaného bloku se při deformaci přemístí do bodu P'



- Kontinuum je v rovnováze → na každé plošce je síla působící z jedné strany kompenzována stejnou silou působící z 2.strany
- V osách elipsoidu – síly kolmé k povrchu → působí pouze **normálová napětí**
- V ostatních směrech existují jak normálové tak **tečné složky** (**tečná napětí**), tečné složky způsobují změnu tvaru tělesa, viz dále
- Pozn. napětí mezi sousedními částicemi (tj. vnitřní elestické síly) drží látku pohromadě

Síly v kontinuu

Síly působící v kontinuu:

1. Vnitřní × vnější
2. **Objemové** (nejčastěji gravitační) × **povrchové** (plošné)

Objemové (~ m) | **Povrchové** (plošné)

Síly dlouhého dosahu (síly objemové) × **Síly krátkého dosahu (síly povrchové)**

působí bezprostředně na velké vzdálenosti (např. gravitační síla**)** **působí na celý objem** (a nikoli pouze na jeho povrch) vyšetřovaného objektu **působí nezávisle** na silách, působících na sousední elementy	**působí pouze mezi nejbližšími molekulami** (molekulární síly). **vnější síla působí pouze na molekuly tvořící povrch** zkoumaného tělesa (**povrchové síly) - např**. **tlak, tření** atd. účinek povrchových sil ovšem nekončí na povrchu tělesa

Plošné síly

Plošné (povrchové) síly → jsou zodpovědné za deformaci kontinua

- Při deformaci kontinua dojde tedy ke změně rovnovážné polohy částic, což má za následek **vznik sil mezi částicemi**, které se snaží kontinuum vrátit do původního stavu.
- Deformované kontinuum se dostává do stavu **napjatosti**. Charakterizujeme jej veličinou, která se nazývá **napětí** (viz obr. – trojosý elipsoid v deformovaném tělese)
- Nahrazujeme vnitřní působení → působením vnějším (lze kvantifikovat)

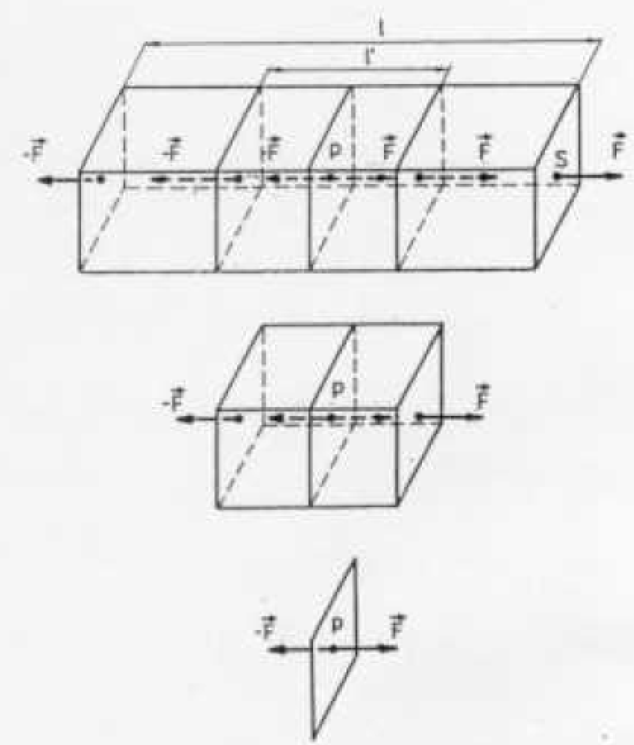
plošná hustota povrchové síly (vektor napětí) $\vec{\sigma}$ → **síla působící na jednotkovou plochu povrchu**

Napětí … 1 N/m^2=1 Pa

$$\boxed{\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}_P}{dS}}$$

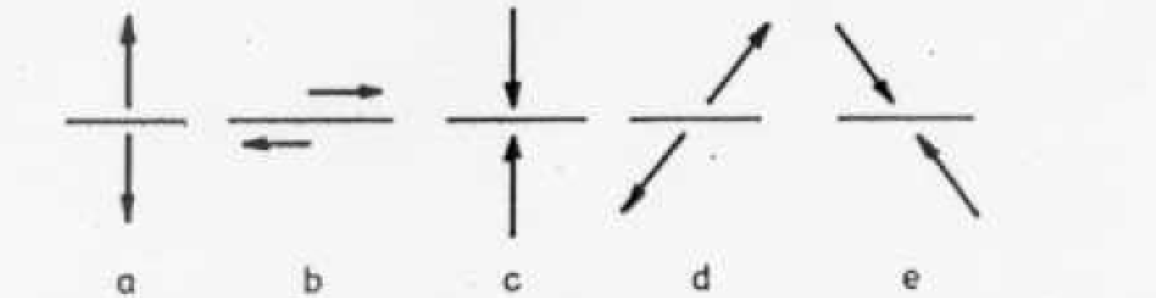
napětí v příslušném místě myšlené plochy, která odděluje navzájem různé části kontinua v napjatém stavu

Plošné síly



Obr. 8.6 Napětí na ploše *p* kolmé k ose tyče

Přenášení smykového namáhání kvádrem



Schematické znázornění různých typů napětí: *a)* čistý tah, *b)* čistý smyk, *c)* čistý tlak *d)* obecné tahové napětí, *e)* obecné tlakové napětí

<u>Napětí:</u>

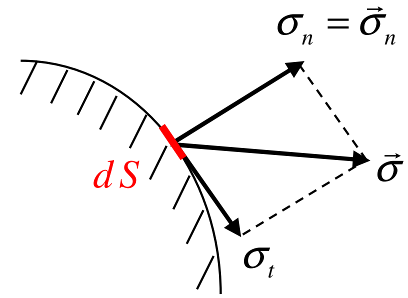
- **přenáší se na plochu** *S* (libovolně zvolenou)
- **nezávisí na tom, jak je síla realizována** - v dostatečné vzdálenosti od působiště ji můžeme nahradit silou vnější (**Saint Venantův princip**)

Síly v kontinuu

Obecně působí elementární síla $d\boldsymbol{F}$ v libovolném směru vzhledem k normále $\boldsymbol{n}$ příslušného elementu plochy dS.

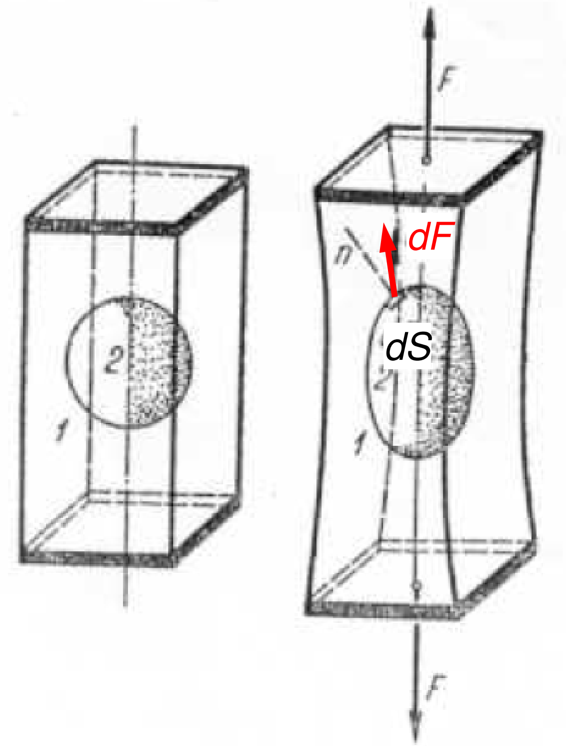
Rozklad $\rightarrow$ **normálové napětí** $\vec{\sigma}_n = \dfrac{d\vec{F}_n}{dS}$

tečné napětí $\vec{\sigma}_t = \dfrac{d\vec{F}_t}{dS}$



- Normálové napětí – **tah/tlak** na plošce dS dvou částí kontinua
- Tečné napětí – způsobuje **změnu tvaru** jednotlivých elementů namáhaného kontinua

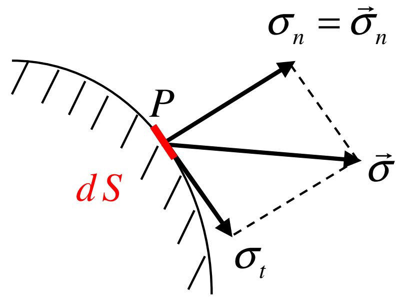
Pozn. K přechodu v elipsoid je třeba, aby normálová napětí v jednotlivých místech plochy byla <u>různě</u> veliká → s tím přímo souvisí přítomnost tečných napětí



- V osách elipsoidu – síly kolmé k povrchu → **hlavní napětí**
- V ostatních směrech existují jak normálové tak tečné složky

Síly v kontinuu

dS – lib.ploška vytknutá v kontinuu: plošná síla ***dF*** i příslušné napětí **σ = *dF/dS*** budou mít obecnou orientaci vůči této plošce



Znaménková konvence: pro uzavřenou plochu je

σ > 0 pokud míří ven (tah)

σ < 0 pokud míří dovnitř (tlak)

Daným bodem kontinua lze vést libovolný počet plošek *dS*

Napětí **σ závisí i na orientaci plošky**, tedy

$$\boxed{\vec{\sigma} = f\left(\text{polohy, orientace plošky}\right)}$$

Tedy existuje ∞ mnoho plošek v bodě P ⇒ ∞ mnoho různých napětí v tomto bodě

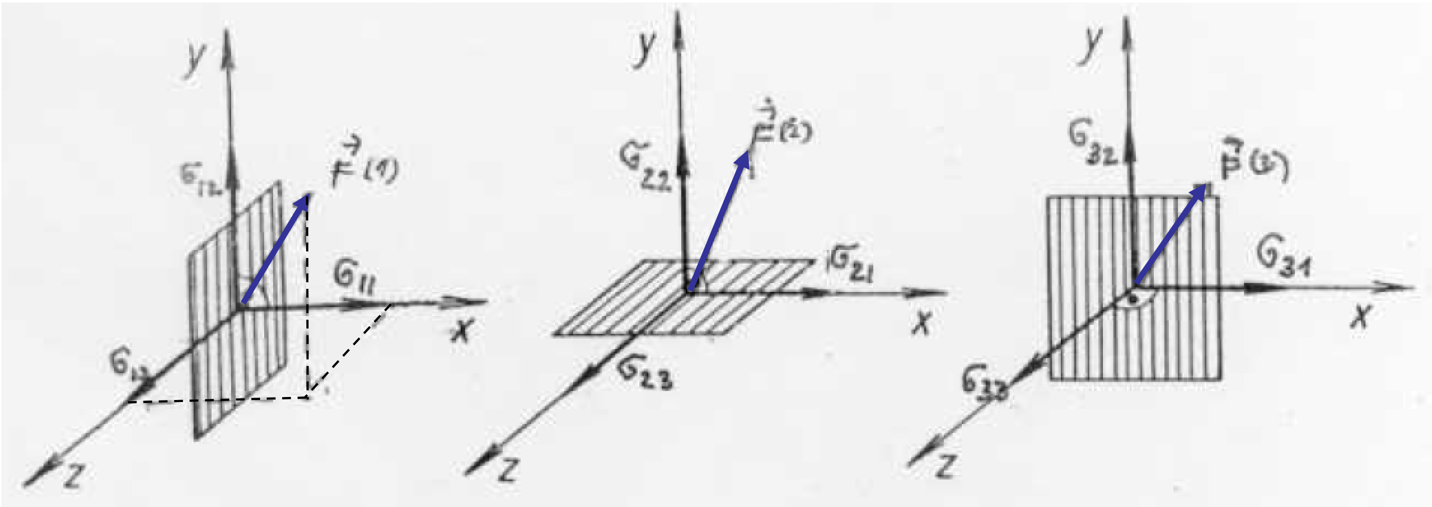
Úloha: je-li známo napětí na některých z těchto plošek, vypočítat napětí v obecném směru a deformaci tělesa.

… řešitelné, pokud známe napětí na třech různých (nejlépe kolmých) ploškách:

Tenzor napětí

Postup: - zvolíme postupně 3 kolmé směry v bodě P kolmé k osám souřadnic
- na každé plošce provedeme rozklad sil do směru os
- složky napětí označíme dvěma indexy (odp. směru plochy a směru síly, viz. níže)

$$\sigma_{ij} = \frac{\Delta F_j^{(i)}}{\Delta S_i}$$



Složky tenzoru napětí

σ_{ij}

„index síly“ (směr, v němž působí složka síly)

„index plochy“ (směr kolmice na plochu)

a) ploška $\perp$ x_1, $\Delta S_1 = \Delta x_2 . \Delta x_3$:

$$\sigma_{11} = \Delta F_1^{(1)} / \Delta S_1$$
$$\sigma_{12} = \Delta F_2^{(1)} / \Delta S_1$$
$$\sigma_{13} = \Delta F_3^{(1)} / \Delta S_1$$

b) ploška $\perp$ x_2, $\Delta S_2 = \Delta x_1 . \Delta x_3$:

$$\sigma_{21} = \Delta F_1^{(2)} / \Delta S_2$$
$$\sigma_{22} = \Delta F_2^{(2)} / \Delta S_2$$
$$\sigma_{23} = \Delta F_3^{(2)} / \Delta S_2$$

c) ploška $\perp$ x_3, $\Delta S_3 = \Delta x_1 . \Delta x_2$:

$$\sigma_{31} = \Delta F_1^{(3)} / \Delta S_3$$
$$\sigma_{32} = \Delta F_2^{(3)} / \Delta S_3$$
$$\sigma_{33} = \Delta F_3^{(3)} / \Delta S_3$$

Pozor - síla **závisí na orientaci** plošky, tedy $\boldsymbol{F}^{(1)} \neq \boldsymbol{F}^{(2)} \neq \boldsymbol{F}^{(3)}$

Tenzor napětí

Tenzor napětí: $$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

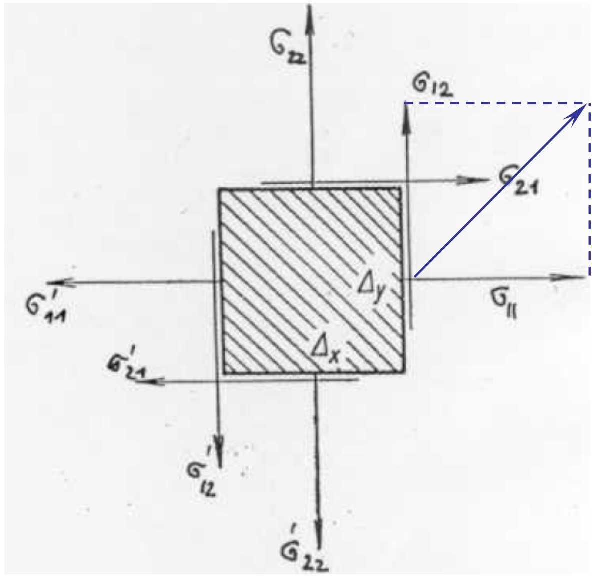
1. řádek = **napěťový vektor** (síla) působící na 1. stěnu, tj. síla $\boldsymbol{F}^{(1)}/\Delta S_1$, atd….

$$\sigma_{ij} = \frac{\Delta F_j^{(i)}}{\Delta S_i} \quad \rightarrow \quad \boxed{\sigma_{ij} = \frac{\partial F_j^{(i)}}{\partial S_i}}$$

Pozn.: 9 čísel σ_{ij}

- se **vztahuje ke zvolenému bodu** P v napjatém tělese, tj. $\sigma_{ij} = f(\boldsymbol{r})$, <u>mění se bod od bodu</u>, hodnoty závisí i na orientaci plošky / s.s.
- stačí k úplnému popisu vnitřního napětí

Tenzor napětí



Malá (infinitezimální) krychlička, tj. na stěnách homogenní napětí, v limitě všechny plošky procházejí počátkem

Fyzikální význam:

! σ_{ii} (diagonální složky) – **tah** ($\sigma_{ii} > 0$) resp. **tlak** ($\sigma_{ii} < 0$)
σ_{ij} , $i \neq j$, (mimodiagon.složky) – **smyk (torze)**

Rovnováha deformovaného tělesa:
- normálové složky: rovnováha sil: $\sigma_{11} = -\sigma'_{11}$ atd. $\sigma_{ij} = -\sigma'_{ij}$
- smykové složky – rovnováha momentů sil:

$$M_3 = \frac{1}{2}\left(a\sigma_{12} - a\sigma_{21}\right)a^2 = 0 \quad \text{tj. } \sigma_{12} = \sigma_{21}, \text{ atd.}$$

$$\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}$$ **symetrický tenzor 2.řádu**

⇒ Geometrická interpretace pomocí elipsoidu – **3 hlavní osy** → pro plochy kolmé na osy napětí je **čistým tahem / tlakem**

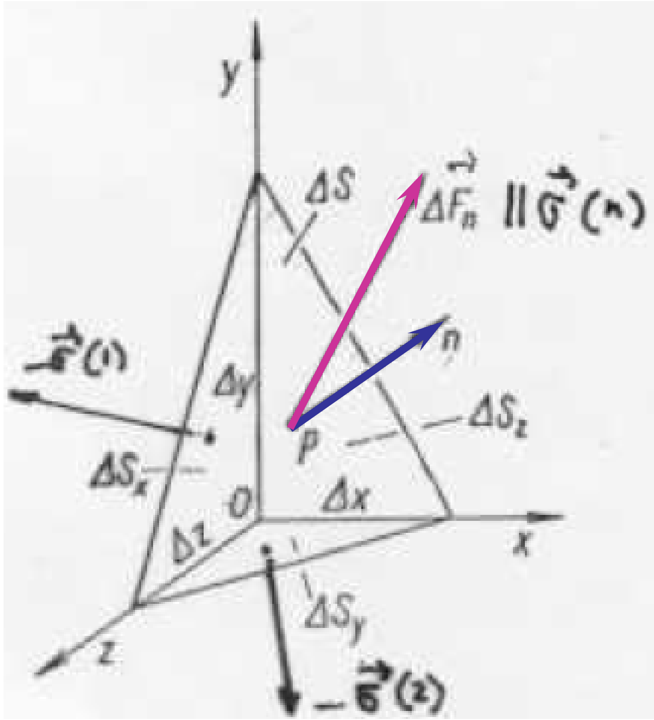
Tenzorové pole – každému bodu kontinua přiřazeno 6 čísel, mění se od bod u k bodu
Pozn. zvláštní typ tenzoru – vztahuje se k působícím silám, může mít lib.směr v látce

(× materiálové tenzory J, ε, μ … - odráží symetrii systému a mají definovanou orientaci v krystalu, pro izotropní krystaly to jsou skaláry)

Vektor napětí

Hledáme **velikost vektoru napětí** na ploše určenou směrem jednotk. vektoru $\boldsymbol{n} = (a_1, a_2, a_3)$, kde $a_i \equiv \cos \alpha_i$

$$\Delta S_1 = \Delta S a_1, \quad \Delta S_2 = \Delta S a_2, \quad \Delta S_3 = \Delta S a_3$$



Rovnováha na čtyřstěnu: síly působící na jeho 4 stěny
objemové síly zanedbáme ($\sim \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$)
plošné síly v rovnováze ($\sim \Delta x_1 \Delta x_2$):

$$F_1^{(n)} = \sigma_{11}\Delta S_1 + \sigma_{21}\Delta S_2 + \sigma_{31}\Delta S_3 = \left(\sigma_{11}a_1 + \sigma_{21}a_2 + \sigma_{31}a_3\right)\Delta S$$

$$F_2^{(n)} = \sigma_{12}\Delta S_1 + \sigma_{22}\Delta S_2 + \sigma_{32}\Delta S_3 = \left(\sigma_{12}a_1 + \sigma_{22}a_2 + \sigma_{32}a_3\right)\Delta S$$

$$F_3^{(n)} = \sigma_{13}\Delta S_1 + \sigma_{23}\Delta S_2 + \sigma_{33}\Delta S_3 = \left(\sigma_{13}a_1 + \sigma_{23}a_2 + \sigma_{33}a_3\right)\Delta S$$

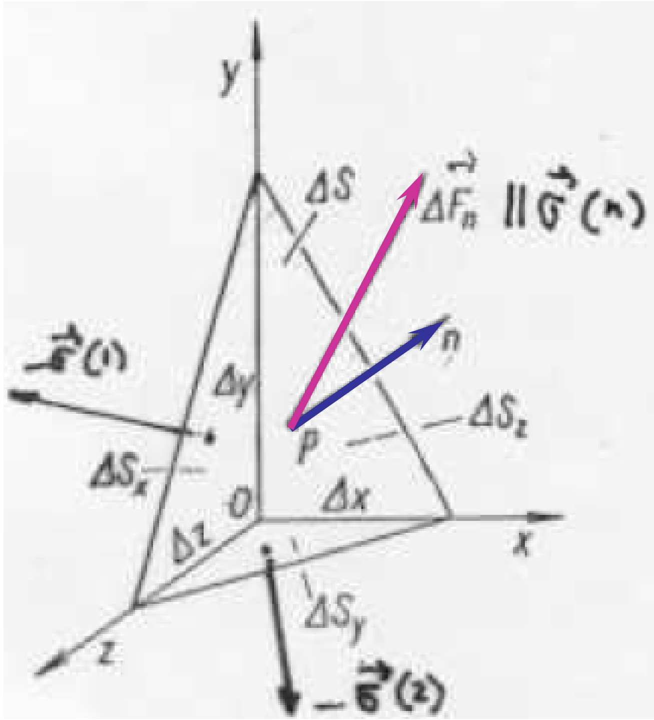
Složky **vektoru napětí**:

$$\frac{F_1^{(n)}}{\Delta S} \equiv \sigma_1^{(n)} = \sum \sigma_{i1} a_i$$ atd. pro další složky

Pozn. k obrázku: Působí-li napjaté kontinum v ploše ΔS na čtyřstěn silou ΔF_n, budou v rovnovážném stavu její složky stejně velké jako součet opačně orientovaných sil, jimiž v příslušném směru působí obklopující kontinuum na čtyřstěn v ostatních ploškách ΔSx, ΔSy, ΔSz

Vektor napětí

Hledáme **velikost vektoru napětí** na ploše určenou směrem jednotk. vektoru $\boldsymbol{n} = (a_1, a_2, a_3)$



$$\frac{F_1^{(n)}}{\Delta S} \equiv \sigma_1^{(n)} = \sum \sigma_{i1} a_i$$ atd. pro další složky, tedy:

ve složkách: $$\boxed{\sigma_j^{(n)} = \sigma_{ij} a_i}$$

pozn.: používáme Einsteinovo sumační pravidlo

(složky **vektoru napětí** ve směru $\boldsymbol{n}=(a_1,a_2,a_3)$)

maticový zápis: $$\boxed{\vec{\sigma}^{(\vec{n})} = \hat{\sigma}^T \vec{n}}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^{(n)} \\ \sigma_2^{(n)} \\ \sigma_3^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Př.: pro $\boldsymbol{n} = (1,0,0)$: $\sigma_1^{(n)} = \sigma_{11}, \sigma_2^{(n)} = \sigma_{12}, \sigma_3^{(n)} = \sigma_{13}$ tedy $\vec{\sigma}^{(n)} = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13})$ ... (1. řádek tenzoru)

Pozn. Diagonalizace tenzoru – fyzikálně najít v daném bodě směry, kdy napětí je čistým tahem/tlakem – hlavní napětí (hlavní osy) – řešení sekulární rovnice

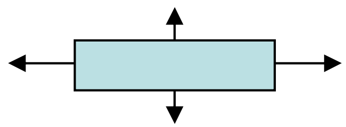
Tenzor napětí

Příklady:
Jednoosé napětí

$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2-osé napětí

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



3-osé
(hydrstat.tlak)

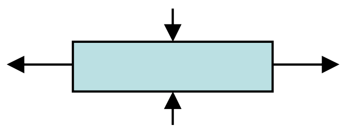
$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad p > 0$$

(v tekutině jsou smyková napětí = 0)

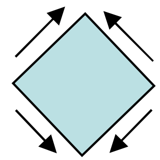
Smyková napětí

$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

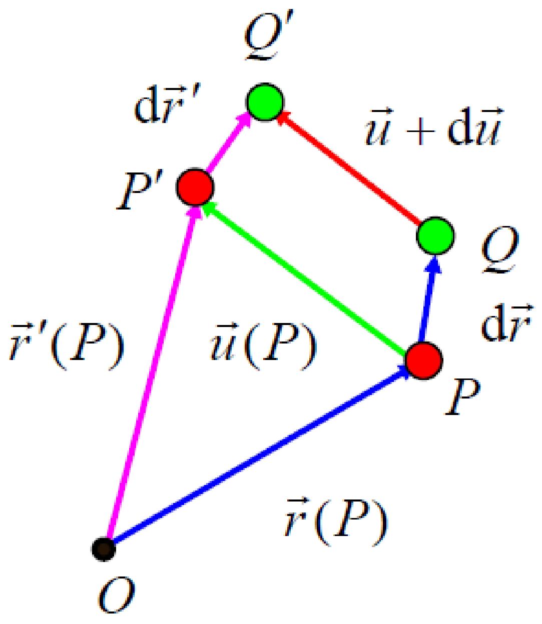


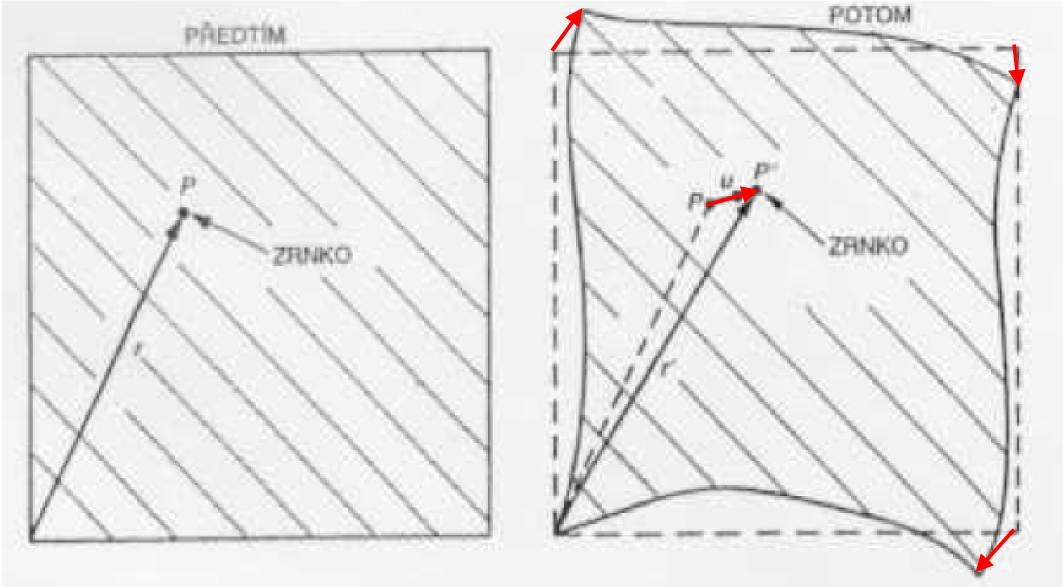
torze

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Deformace





Zrnko látky v bodě P nedeformovaného bloku se při deformaci přemístí do bodu P'

V důsledku napjatosti tělesa vznikají deformace, obecně různé v každém bodě tělesa

Vektor posunutí: $\boxed{\vec{u} = \vec{r}\,' - \vec{r}}$

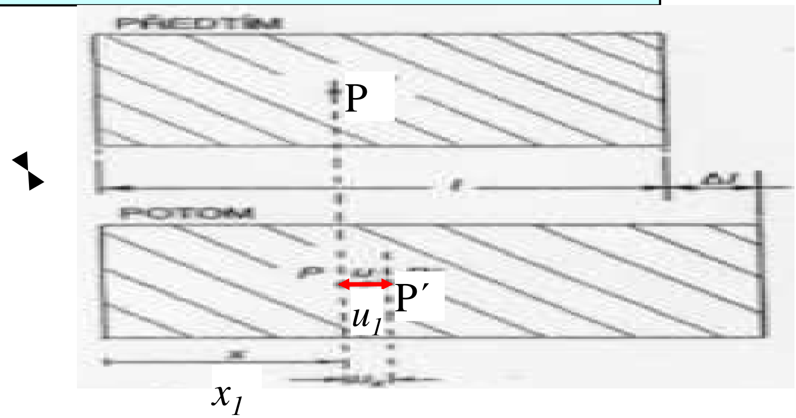
$$u_i = x_i' - x_i$$ … posunutí ve směru i

r průvodič vybraného bodu v <u>ne</u>napjatém tělese
r´ průvodič stejného bodu v napjatém tělese
$\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{r})$ … posunutí je závislé na souřadnicích (mění se místo od místa, jinak posunutí jako celku)

Tenzor deformace

A) Jednoosý tah

(deformace tenké tyče, v celé tyči stejná):



Deformace tyče při prostém tahu.

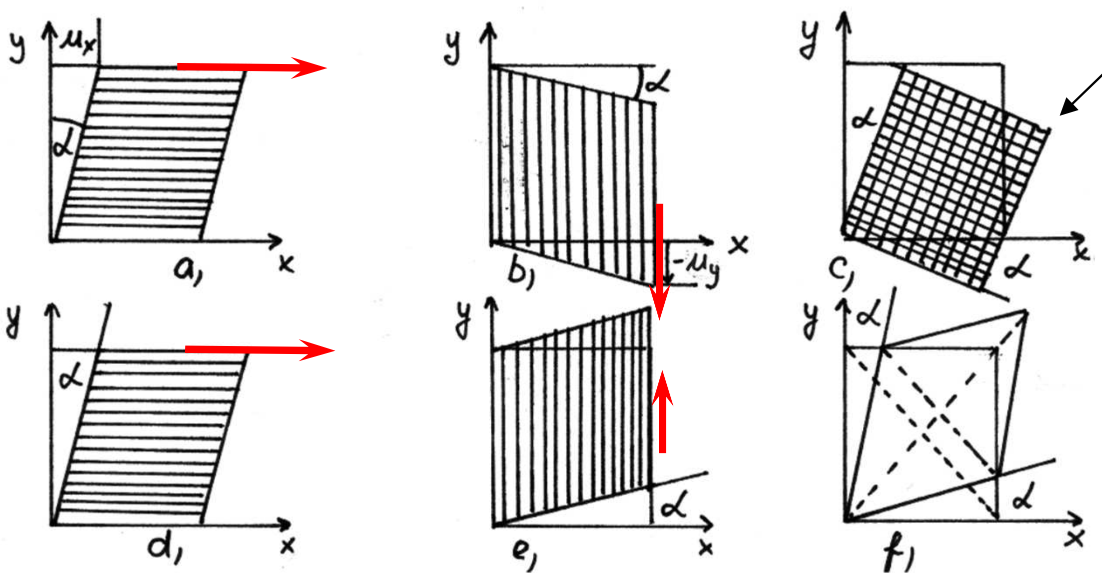
$$\frac{\Delta l}{l} \equiv \frac{u_1}{x_1} = \varepsilon_{11}$$

Lokální deformace v bodě P:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \qquad \text{obecně:} \quad \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

… <u>relat.změna délky</u> elementu ve směru osy *i*

B) Smyková deformace



prostá rotace

Smyková deformace

Deformace hranolu při prostém smyku.

Tenzor deformace

Smyková deformace

$$\tan\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} = \frac{u_1}{x_2} = \varepsilon_{12} \qquad \frac{\alpha}{2} = \frac{u_2}{x_1} = \varepsilon_{21}$$

Lokální deformace v bodě P: $\varepsilon_{12} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}$ $\quad \varepsilon_{21} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}$ $\quad$ atd.

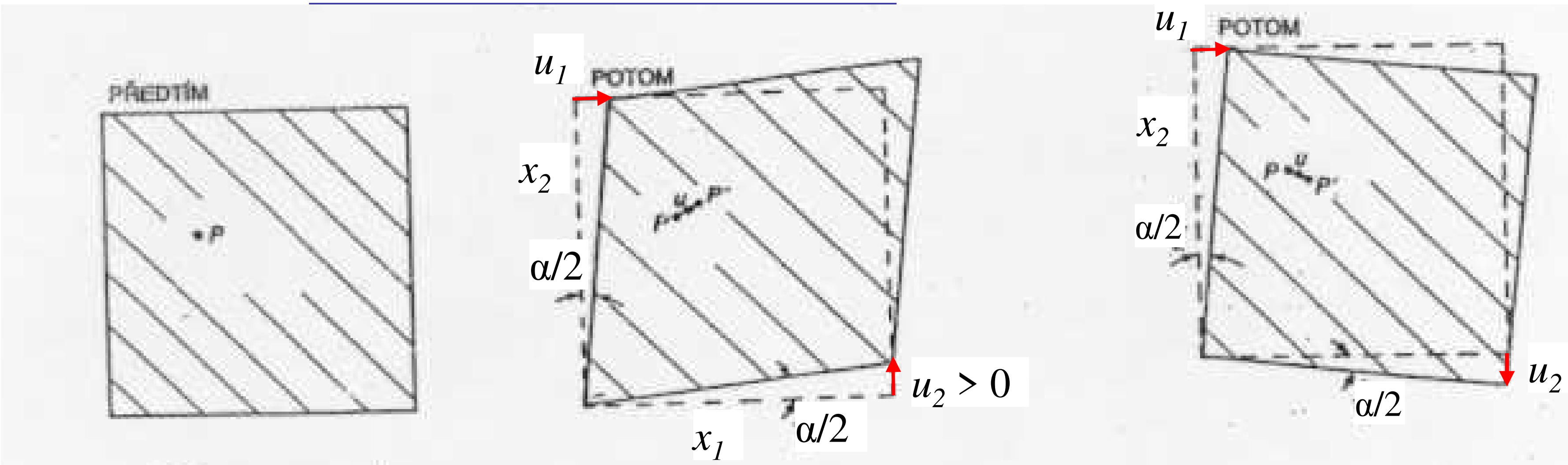
Obecně: $\boxed{\varepsilon_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}}$

ε_{ij}

normála ke směru posunutí

směr posunutí

Pozor: pokud $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21}$… homogenní rotace ⇒ ot.: **jak odlišit rotaci od deformace**?



Homogenní deformace ve smyku

Homogenní rotace bez deformace

Tenzor deformace

Definuji: $e_{ij} = (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji})/2$, neboli:

tenzor malých deformací: $$\boxed{e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}$$

$$e = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix}$$

Symetrický tenzor, platí: $e_{ij} = e_{ji}$

Pro homogenní rotaci: $e_{ij} = 0$ (neboť $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21}$), tenzor rotací $= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$

! **<u>Fyzikální význam</u>**:

e_{ii} … **relat.změna délky** elementu ve směru, který byl původně ve směru i

e_{ij} …**smykový úhel** ($\alpha_{ij}/2$) o který se deformací změní původně pravý úhel mezi elementy původně $\parallel$ x_1 a x_2

Shrnutí: **čísla e_{ij} udávají jak se změní délky v diferenciálním okolí daného bodu r**

Hodnoty e_{ij} se mění bod od bodu – tenzorové pole deformací

Tenzor rychlosti deformace

Závislost deformace na čase:

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial t\partial x_i}+\frac{\partial^2 u_i}{\partial t\partial x_j}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)=D_{ij}$$

tenzor rychlosti deformace

kde $v_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}$ - **rychlost posunutí**

Rychlost v diferenciálním okolí lib.bodu x_j:

$$v_i\left(x_j+dx_j,t\right)=v_i\left(x_j,t\right)+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}dx_j+\ldots\equiv \underbrace{v_i\left(x_j,t\right)}_{\text{rychlost translace}}+\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)dx_j}_{\text{rychlost rotace}}+\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)dx_j}_{\text{rychlost deformace}}$$

rychlost translace (pohyb kontinua jako celku) | rychlost rotace | rychlost deformace s jakou se mění vzdálenost částic v okolí bodu x_j

Helmholtzova věta:
Pohyb kontinua v okolí lib.bodu lze rozložit na pohyb translační, rotační a deformační

Pozn. V případě existence všech konečných derivací funkce v bodě *a,* Taylorův rozvoj:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Operátor rotace

Operátor rotace:

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \left[\nabla \times \vec{v}\right]$$

Ve složkách: $\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)_1 = \left(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)$ ... atd.

kde $\vec{v}$ je lib.vektor a $\vec{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \dfrac{\partial}{\partial x_3}\right)$

rotační (vírový) pohyb v kontinuu resp. tekutině

Rovnice rovnováhy kontinua

Podmínka rovnováhy sil na kvádru konečného objemu:

$$\left(\vec{\sigma}^{(1)}-\vec{\sigma}'^{(1)}\right)a_2a_3+\left(\vec{\sigma}^{(2)}-\vec{\sigma}'^{(2)}\right)a_3a_1+\left(\vec{\sigma}^{(3)}-\vec{\sigma}'^{(3)}\right)a_1a_2+\vec{G}a_1a_2a_3=0$$

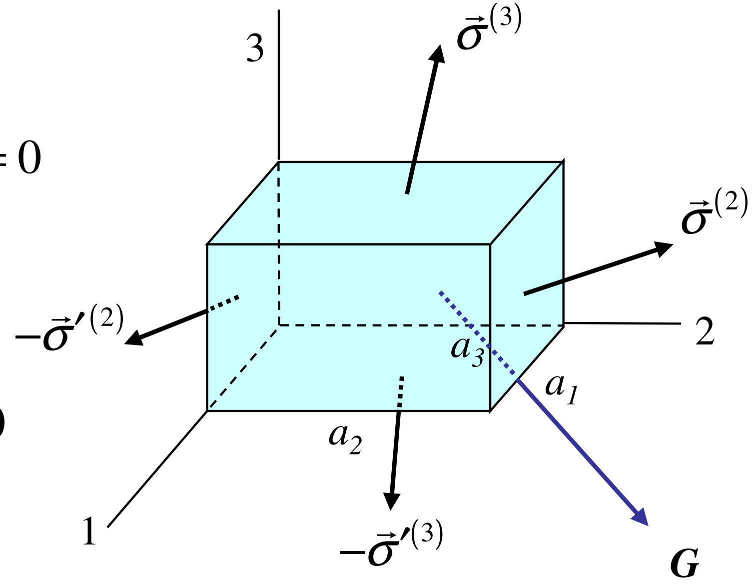
kde: $\vec{\sigma}^{(1)}=\left(\sigma_{11},\sigma_{12},\sigma_{13}\right)$... napěťový vektor působící na 1. stěnu

ve složkách (3 rce pro složky j=1,2,3):

$$\left(\sigma_{1j}-\sigma'_{1j}\right)a_2a_3+\left(\sigma_{2j}-\sigma'_{2j}\right)a_3a_1+\left(\sigma_{3j}-\sigma'_{3j}\right)a_1a_2+G_ja_1a_2a_3=0$$

věta o střední hodnotě (v limitě → derivace):

$$\sigma_{11}-\sigma'_{11}=\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}a_1 \quad \text{tj.} \quad \sigma_{ij}-\sigma'_{ij}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}a_i$$



***G* = *F*/*V* …** **objemová síla**
(působící na jednotku objemu)

Rovnice rovnováhy kontinua:

$$\boxed{\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}+G_j=0}$$

Pohybová rovnice kontinua (v diferenciálním tvaru):

$$\boxed{\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}+G_j=\rho\frac{d^2u_j}{dt^2}}$$

ve složkách: $\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}+G_1=0,$ atd.

$$\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix}$$

pozn. užíváme Einsteinovu sčítací konvenci (tj. suma přes i)

Pohybová rovnice kontinua

Rovnováha kontinua nastane, bude-li výslednice všech vnějších sil (objemových i plošných) působících na dané kontinuum nulová:

$$\vec{F}_V + \vec{F}_S = 0$$

Při nenulové výslednici bude mít element kontinua zrychlení ***a***

$$\vec{F}_V + \vec{F}_S = m\vec{a}$$

Pro objem V kontinua uzavřený plochou S a hustoty ρ:

$$\boxed{\int_V \rho \vec{I} dV + \oiint_{S(V)} \vec{\sigma} dS = \int_V \rho \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} dV}$$

Pohybová rovnice kontinua v integrálním tvaru

celk.objemová síla o intenzitě ***I***

celková plošná síla

součet součinů hmotnosti a zrychlení všech elementů oblasti V