Vlnění

Vlnění - <u>šíření rozruchu prostorem</u> od místa k místu → vznik postupné vlny

Př.: mechanická výchylka, deformace, hustoty, tlaku (akustické vlny), teploty, intenzity silového pole (elmg.)… nějaká fyzikální veličina (viz. rázostroj)

Zdroj rozruchu: obvykle kmitající „systém“ - oscilátor (zářič), nebo lib. dynamická "porucha" → **vazba** mezi oscilátory

- **Vlny přenášejí energii a hybnost** (viz vázané oscilátory, rázostroj)
- Vlny se šíří **konečnou rychlostí,** c (viz vázané oscilátory, rychlost c závisí na vazbě)
- **Pohybuje (přenáší) se rozruch, nikoli částice/hmota** (osc.kmitají kolem rovnovážné polohy) nepřemisťuje se hmota …. **postupná vlna**

Typy vln:

- **mechanické:** pouze v látkovém prostředí – přenos rozruchu (signálu) v důsledku elastické vazby mezi oscilátory, (kapalina, plyn, pevná látka - kontinuum, př. zvukové, ve vodě, seismické… řídí se N.Z.)
- **elektromagnetické** (radiové, TV, světlo, tepelné, rtg … kmitavý pohyb náboje), nepotřebují hmotné prostředí
- **kvantové** (vlny hmoty – de Broglieovy: e, p, elm.částice, molekuly… na štěrbině, $\nu \sim E$, $k \sim p$
- **gravitační** LIGO, VIRGO …interferometry

Vlnění

Vlna na struně
https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-on-a-string/latest/wave-on-a-string_en.html

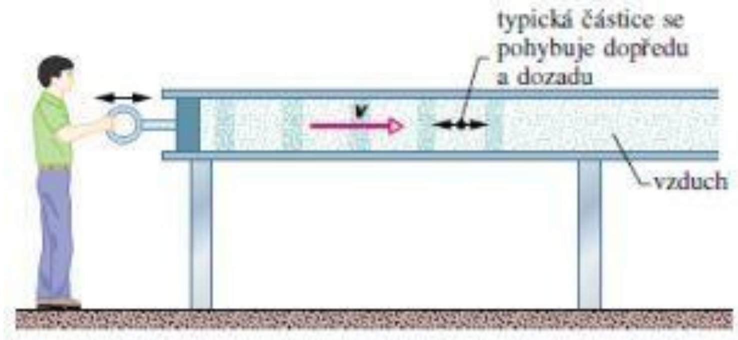
! Základní vlastnost vlnění: jednotlivé body vlny (oscilátory) nekmitají synchronně, **podstatou vlnění je vzájemné fázové posunutí jednotlivých bodů řady !** !

Pozn. V homogenním izotropním prostředí je fázové posunutí konstantní, v nehomogenním se může měnit v prostoru i v čase

https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/waves/wavemotion.html

Příčné vlnění

podélné vlnění



Vlnění

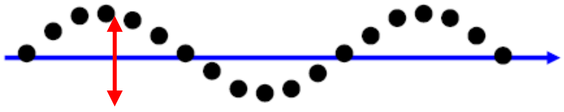
2 základní <u>typy vlnění</u>:

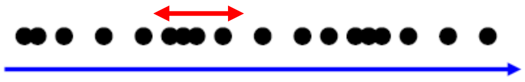
A) Vlnění podélné (longitudinální)

- kmity se dějí ve směru šíření vlny (např. elastická podélná vlna v pevných látkách, kapalinách a plynech)

B) Vlnění příčné (transverzální)

- kmity se dějí kolmo k šíření vlny (např.elmag.vlny, elastická příčná vlna v pevných látkách)





- <u>Polarizace vlny</u>: rovinná polarizace - kmity v jedné rovině (jen příčné vlny)
- <u>Příčné mechanické vlny</u> pouze v pevných látkách – tečná (smyková) napětí jsou nezbytná, v kap. a plynech se neudrží
- <u>Podélné mech.vlny</u> ve všech prostředích (i plyny a kapaliny) – normálová napětí nutná

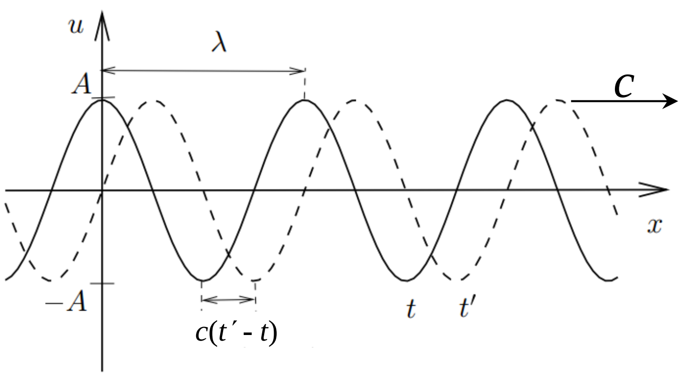
Př.: rázostroj - přenos rozruchu (energie, hybnosti)

Popis vlnění

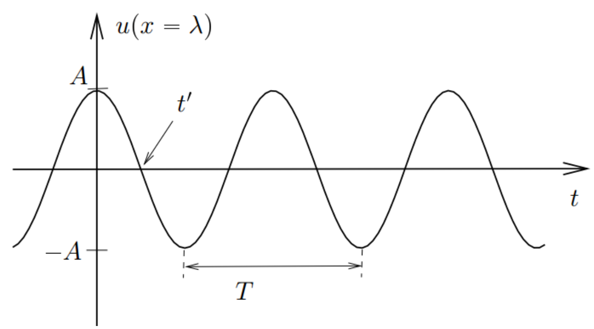
- Zdroj P_0 v počátku bude konat harmonický pohyb, pro jehož výchylku platí např.:

$$u_0(t) = A \sin \omega t$$

- Rozruch se bude šířit podél osy x fázovou rychlostí c, takže do nějakého bodu P o souřadnici x dorazí za čas $\tau = x/c$.
- Znamená to, že výchylka $u(x,t)$ v bodě P a v čase t bude stejná jako výchylka zdroje P_0 v čase $t - x/c$.
- Bude tedy platit: $$u(x,t) = u_0(t - x/c) = A \sin \omega(t - x/c)$$
- Harmonické vlnění je popsáno funkcí souřadnic a času.



Harmonické vlnění ve 2 různých časech



Časové výchylky bodu o souřadnici x = λ

Popis vlnění

Funkce popisující postupnou vlnu: u – **vlnová funkce**

Šíření rozruchu prostorem: **časově i prostorově proměnná** fyzikální veličina – skalár (vlny hustoty) nebo vektor (výchylka, intenzita pole)

$$u = u(x,t) \quad \text{resp.} \quad \vec{u} = \vec{u}(x,t), \quad \text{popř.} \ u = u(\vec{r},t)$$

profil rozruchu v čase $t = 0$: $\left[u(x,t)\right]_{t=0} = f(x)$

profil rozruchu v bodě $x = 0$: $\left[u(x,t)\right]_{x=0} = f(t)$

V čase $t > 0$ se rozruch posune o vzdálenost ct, kde c - **fázová rychlost**

V s.s. pohybující se s rozruchem – popis stejnou fcí … $u = f(x')$

Transformace: $x' = x - ct$ $\rightarrow$ stejná porucha je v klidové s.s. popsána: $\boxed{u = f(x \mp ct)}$

Tedy: přechod statický profil $\rightarrow$ postupující rozruch (vlna) dostaneme transformací: $\boxed{x \rightarrow x \mp ct}$

Ekvivalentní zápis:

$$\left.\begin{aligned} u &= f(x - ct) = f\left(-c\left(t - x/c\right)\right) \\ u &= f(x + ct) = f\left(c\left(t + x/c\right)\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{u = g\left(t \mp x/c\right)}$$

Je-li dána časová závislost rozruchu (vlny) ve fixním bodě x, pak jeho časový vývoj dostaneme transformací: $\boxed{t \rightarrow t \mp x/c}$

! Shrnutí: v argumentu vlnové fce popisující **postupnou** vlnu šířící se ve směru osy x fázovou rychlostí c se **časová a prostorová souřadnice vyskytují výhradně v lin.kombinaci** $x \pm ct$ resp. $t \pm x/c$, kde záporné (kladné) znaménko značí šíření ve směru kladné (záporné) osy x.

Harmonická vlna

Harmonická monochromatická vlna: $u(x,t) = A\sin\left(k(x-ct)\right) \quad = A\sin(kx-kct)$

Prostorová periodicita: $x \to x \pm \lambda$

$$u(x,t) = u(x\pm\lambda,t) \quad \to \quad A\sin\left(k(x\pm\lambda-ct)\right) \quad \Rightarrow \quad |k\lambda| = 2\pi, \quad \text{def. } k>0, \lambda>0:$$

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}} \quad \text{[rad/m]} \quad \text{vlnové číslo (vlnočet)}$$

Časová periodicita**:** $t \to t \pm T$

$$u(x,t) = u(x,t\pm T) \quad \to \quad A\sin\left(k(x-ct) \mp kcT\right) \quad \Rightarrow \quad |kcT| = 2\pi:$$

perioda: $\boxed{T = \frac{\lambda}{c}}$ **frekvence:** $\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}}$ **úhlová frekvence:** $\boxed{\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = kc}$

fázová rychlost: $\boxed{c = \frac{\omega}{k}}$ **vlnočet:** $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$

Vlnová fce popisující harmonickou vlnu postupující ve směru *x* fázovou rychlostí *c*:

$$\boxed{u(x,t) = A\sin\left(kx \mp \omega t + \varphi_0\right)} \qquad \boxed{u(x,t) = \hat{A}e^{i(kx\mp\omega t)} = Ae^{i(kx\mp\omega t+\varphi_0)}}$$

fáze vlny

Pozor na rozdíl mezi funkcí popisující kmity a popisující vlnění **!**

Harmonická vlna

Důležitý závěr ještě jednou: při vlnovém pohybu se nezávisle proměnné x a t mohou vyskytovat pouze v kombinaci: $x \mp ct$ resp. $t \mp x/c$

Příklady:

Monochromatická harmonická vlna – periodická, monofrekvenční, popis harm.fcí, př.:

$$u(x,t) = A\sin\left(k\left(x - ct\right)\right)$$

k … normovací konst., fyz.význam viz výše

Harmonická vlna složená - periodická, superpozice harm.fcí (i složité, multifrekvenční), př.:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{N} A_i \sin\left(k_i\left(x - c_i t\right)\right)$$

Neharmonická vlna – neperiodická, např. jednotlivý puls:

$$u(x,t) = Ae^{-b(x-ct)^2}$$

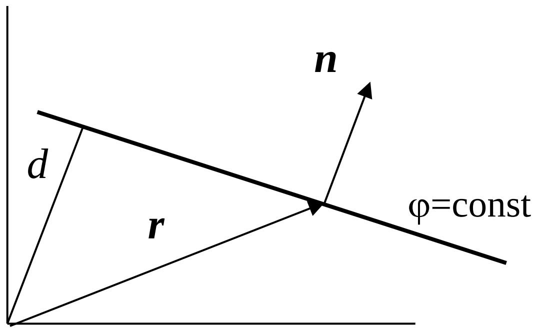
Rovinná vlna

<u>Fáze vlny</u>: $\varphi = kx - \omega t + \varphi_0$

<u>Vlnoplocha</u> - plocha konstantní fáze: $\dfrac{d\varphi}{dt} = k\dfrac{dx}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\omega}{k} = c}$

⇒ vlnoplochy postupují v prostoru <u>fázovou rychlostí c</u> **!**

neboli: $t - x/c = t_0 - x_0/c \Rightarrow x = x_0 + c(t - t_0)$



<u>Rovinná vlna:</u> vlna s <u>rovinnou vlnoplochou</u> →

- postup ve směru osy *x* – (všechny rovnice viz výše)

- postup ve směru jednotk.vektoru ***n*** = (a_1,a_2,a_3) :

<u>***n.r*** = *d*</u> tj. $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=d$ .... rce roviny kolmé k ***n***

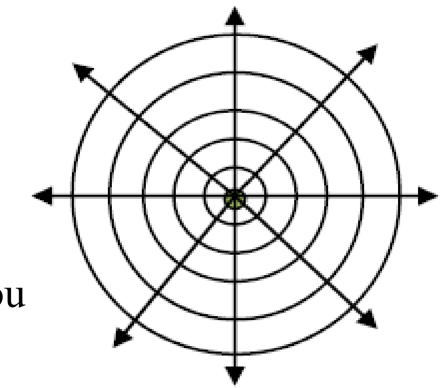
Vlnová fce pro rovinnou vlnu postupující ve směru ***n*** (tj. ve směru paprsku ***n***):

$$u(\vec{r},t) = Ae^{i(k\vec{n}\cdot\vec{r}-\omega t)} = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad \text{kde } \vec{k} \equiv \vec{n}k = \vec{n}\frac{2\pi}{\lambda}$$

… <u>vlnový vektor</u>

Vlnu libovolného typu lze získat jako superpozici vhodných rovinných vln

Sférická vlna



<u>Sférická (kulová) vlna</u> → zdroj např. pulsující koule, výbuch

Pozn.

- v dostatečné vzdálenosti od zdroje lze element kulové plochy nahradit rovinou
- energie vztažená na jednotk.plochu (hustota energie) klesá u sférické vlny se vzdáleností jako $1/r^2$, amplituda vlny bude klesat jako $1/r$, viz dále a viz též harm.osc.
- (pozor – na rozdíl od kulové vlny, amplituda rovinné vlny nezávisí na vzdálenosti !)

Vlnová fce pro sférickou vlnu: $$\boxed{u(r,t) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)}}$$ (r je vzdálenost od zdroje, nikoli polohový vektor!)

Přehledně:

- sférická vlna: výkon: $P = \dfrac{\Delta E}{\Delta t}$ intenzita: $I = \dfrac{\Delta E}{\Delta t . S} \sim \dfrac{1}{S} \sim \dfrac{1}{r^2}$ a protože $I \sim A^2 \Rightarrow A \sim \dfrac{1}{r}$

- válcová / kruhová vlna (na rybníce): $I = \dfrac{\Delta E}{\Delta t . 2\pi r} \sim \dfrac{1}{r}$ tedy $A \sim \dfrac{1}{\sqrt{r}}$

- rovinná vlna (viz vztahy na předchozích stránkách): $I \neq f(r)$ tedy $\Rightarrow A \neq f(r)$

Vlnová rovnice

- Vlnění musí splňovat: $u = f(t \mp x/c) = f(s)$ kde $s = t \mp x/c$

(vlnová rovnice pro **rovinnné netlumené vlny v homogenním izotropním prostředí)**

• **změna podle času:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial s} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$$

• **změna podle souřadnice *x*:**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \left(\mp \frac{1}{c}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \cdot \left(\mp \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$$

Vlnová rovnice

na další straně $\xleftarrow{\text{3D}}$ $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$ $\xleftarrow{\text{1D}}$

Obecné řešení: $u = f(t - x/c) + g(t + x/c)$

Vlnová rovnice

Rovinná vlna postupující ve směru $\boldsymbol{n} = (a_1, a_2, a_3)$: $u(\vec{\mathbf{n}}\vec{\mathbf{r}} \mp ct) \rightarrow u\left(\sum a_i x_i \mp ct\right)$

3D →

$$\boxed{\Delta u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

Odvoďte vln.rci pro 3D.
(návod – použijte stejný postup jako pro 1D vln.rovnici na min.str.)

Operátory:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \quad \text{... operátor nabla}$$

$$\Delta \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad \text{.... Laplaceův operátor}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \equiv \nabla^2 u \equiv \Delta u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

- Každá rovnice tohoto typu (tj. kombinace druhých derivací podle prostorových proměnných a časové proměnné) popisuje netlumené vlnění, konst. úměrnosti udává fázovou rychlost
- Řešením je každá funkce popisující postupnou vlnu, $f = f(x \pm ct)$

Vlnová rovnice

Sférická vlna:

- rozruch v čase *t* závisí pouze na vzdálenosti *r*

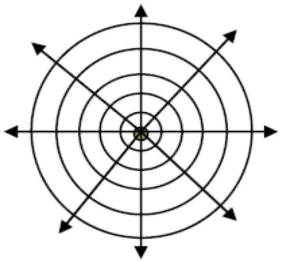
- Řešení hledáme ve tvaru $u = u\,(r,t)$:

$$u(r,t) = \underbrace{\frac{f(r-ct)}{r}}_{\text{divergentní vlna}} + \underbrace{\frac{f(r+ct)}{r}}_{\text{konvergentní vlna}}$$

$$\boxed{\Delta(ru) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(ru)}{\partial t^2}}$$

- Př.: harmonická sférická vlna:

$$u(r,t) = \frac{A}{r} e^{\pm i(kr-\omega t+\varphi_0)}$$



Zdroj kul.vln – např. pulzující koule, výbuch

Vlnová rovnice

Veledůležité závěry:

- Vlnová rce je lineární $\Rightarrow$ jsou-li u_1, u_2 … řešením, potom $\Rightarrow$ $\boxed{u = \sum u_k}$ je řešení … **princip superpozice**

- Každou vlnu lze rozložit na superpozici jednotlivých rovinný vln: $\boxed{u(\vec{r},t) = \sum A(\vec{k})e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}}$

- rychlost šíření vlnového rozruchu závisí na vlnové délce:

$\boxed{\omega = \omega(\vec{k})}$ … **disperze** $\Rightarrow$ $\boxed{c = c(\vec{k})}$

pozn.: disperzní × nedisperzní prostředí

Vlnová rovnice

Poznámky

- **Lineární dif. rce** – platí **<u>princip superpozice</u>**, viz dále
- **Parciální dif. rce** – platí <u>v limitě pro malý prostor (bod)</u>, v němž lze každdou obecnou vlnu aproximovat např. vlnou rovinnou, tj. jako superpizici rovinných vln
- Ve vln.rci se nevyskytuje ani charakteristika směru ani fce popisující konkrétní vlnění h.b.
- Popisuje <u>lib.typ vlnění (vlna netlumená)</u>
- Fyzikální smysl:

$\partial^2 u / \partial t^2$ ... význam zrychlení v daném bodě prostoru (h.b., řady bodů, objemového elementu prostředí)

$c^2 \cdot \partial^2 u / \partial x^2$ ... význam síly působící na jednotk.hmotnost

důležité: dx/dt ... rychlost určité částice (hm.bodu)

$\partial x / \partial t$ ... rychlost částic procházející daným místem prostoru (viz kap.proudění kapalin)

- Př. popisují vlnu? $u(x,t) = A \sin ax . \cos bt$ $\qquad u(x,t) = Ae^{i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)}$

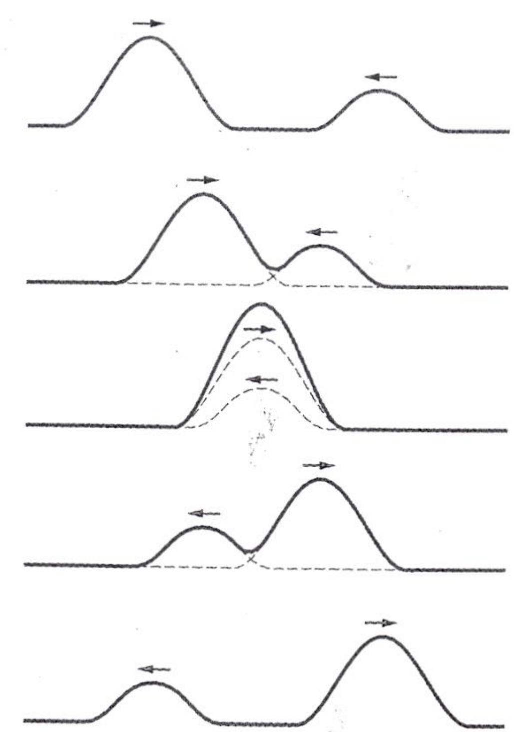
$u(x,t) = \sqrt{ax + bt}$

- Ot.: vyhovují vlnové rci výše uvedené fce?
(Návod: dosadit do vln.rce $\Rightarrow$ podmínka pro vzájemný vztah mezi parametry: $k = \omega/c$)
- Elmg záření $\leftarrow$ nerovnoměrný pohyb náboje (synchrotronové záření, kmitající dipól, elektronové přechody)

Interference vlnění

Skládání vln na základě principu superpozice

Překrývající se vlny se při svém postupu navzájem neovlivňují.



Obr. 17.10 Série pěti snímků dvou pulzů, postupujících na napnuté struně v opačném směru. Pokud sebou pulzy právě probíhají, použijeme princip superpozice.

Interference vlnění

Fázový rozdíl $\Delta\varphi$ × **dráhový rozdíl** Δx:

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,t) &= A\sin(kx_1 - \omega t) \\ u_2(x,t) &= A\sin\underbrace{(kx_2 - \omega t)}_{} \end{aligned}\right\} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = k(x_2 - x_1), \qquad \Delta\varphi = k\Delta x$$

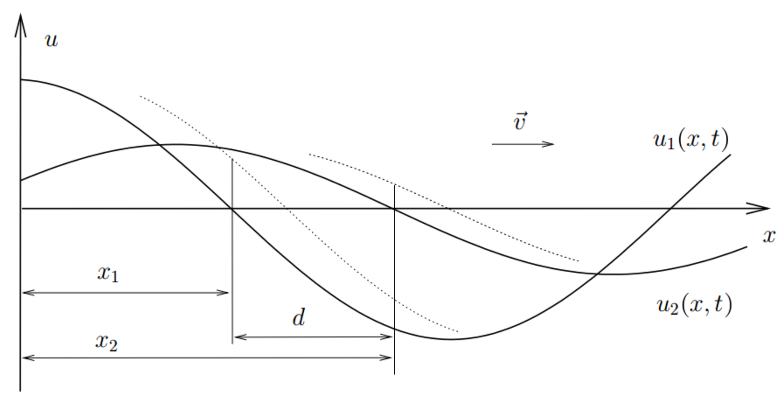
$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x}$$

Konstruktivní interference (interf. maxima): $\Delta\varphi = 2\pi.n, \quad \Delta x = n.\lambda$

Destruktivní interference (interf. minima): $\Delta\varphi = (2n+1)\pi, \quad \Delta x = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$

Dráhovým rozdílem rozumíme vzdálenost dvou bodů, jejichž kmity probíhají se stejnou fází.

Fázovými posunutími $\varphi_1 \neq \varphi_2$ vznikne mezi oběma vlnami dráhový rozdíl $d = x_2 - x_1$.



Dráhový rozdíl: d Fázový rozdíl: $d/\lambda \times 2\pi$

(pro vlny stejné frekvence!)

Interference vlnění

Interference – skládání vln:

-podle **principu superpozice** platí, že vlny se v prostředí šíří nezávisle na ostatních vlnách

- výsledná vlna je součtem dílčích vln, které se skládají $\boxed{\vec{u}(\vec{r},t) = \sum_k \vec{u}_k(\vec{r},t)}$

Interference dvou vln stejné frekvence:

(postupující ve stejném směru)

$$u_1(x,t) = A_1 \cos(\omega t - kx + \varphi_1) \qquad u_2(x,t) = A_2 \cos(\omega t - kx + \varphi_2)$$

$$u_1 + u_2 = \cos(\omega t - kx)(A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2) - \sin(\omega t - kx)(A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2)$$

$$u = u_1 + u_2 = \underline{A\cos(\omega t - kx + \varphi)} = A\cos(\omega t - kx)\cos\varphi - A\sin(\omega t - kx)\sin\varphi$$

Amplituda a fáze:

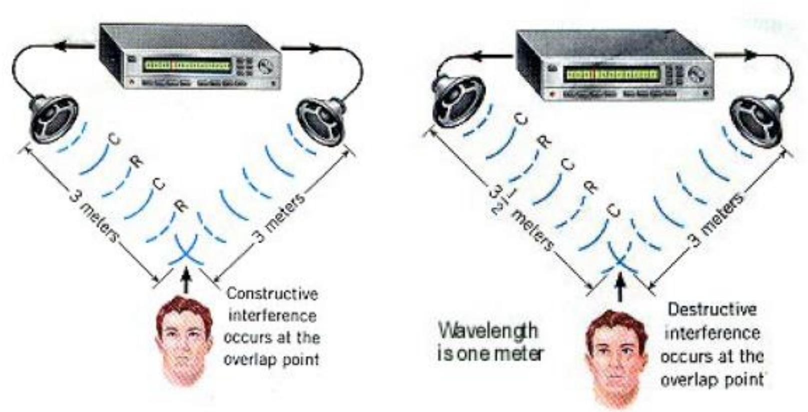
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad \tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

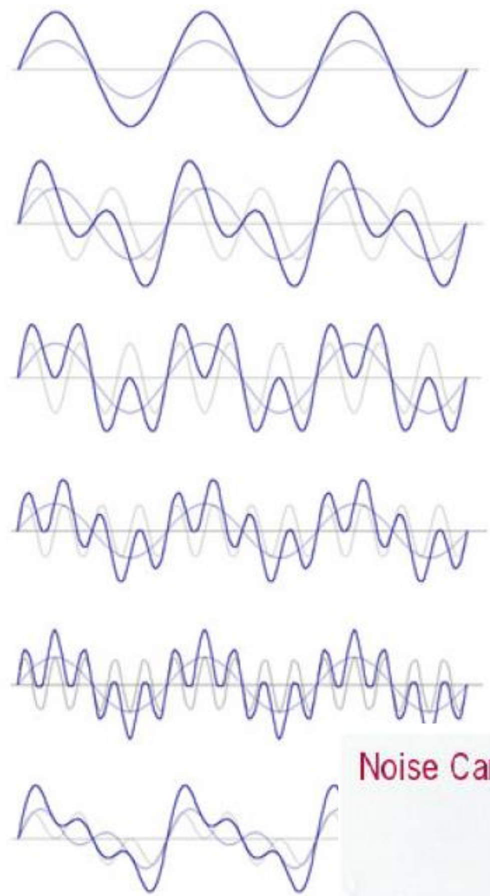
pozn. intenzita ~ čtverci amplitudy, A^2

Interference vlnění

Interference – skládání vln:

- intenzita (resp.amplituda) vlnění je v daném místě prostoru zesílena nebo zeslabena v závislosti na frekvenci a fázi vlnění

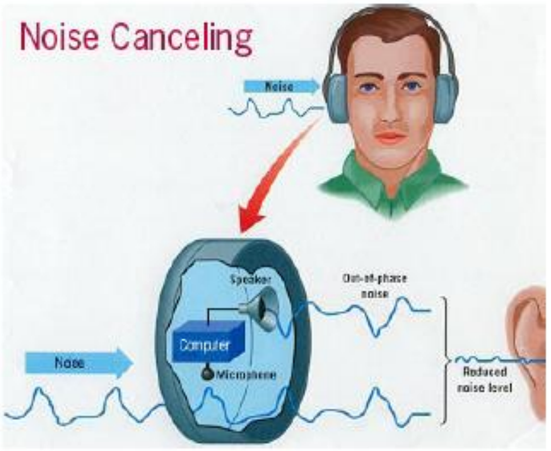




konstruktivní interference

destruktivní interference

Slyšitelný zvuk $\lambda = c / f = 22 - 0{,}02 \text{ m}$



Interference vlnění – stojaté vlny

Stojaté vlnění:

- důležitý případ interference dvou stejných vln, šířících se proti sobě

$$u_1(x,t) = A_0 \sin(\omega t - kx) \qquad u_2(x,t) = A_0 \sin(\omega t + kx)$$

Není postupná vlna!! Nepřenáší se energie!!

$$\boxed{u = u_1 + u_2 = 2A_0 \cos(kx)\sin(\omega t) = A\sin(\omega t)}$$

… kmity!

Amplituda stojatého vlnění: $\boxed{A = 2A_0 \cos(kx)}$

- amplituda *A* závisí periodicky na vzdálenosti
- nevzniká postupné vlnění
- vznikají harm.kmity se stejnou fází

Vzdálenost sousedních uzlů nebo kmiten = $\lambda/2$

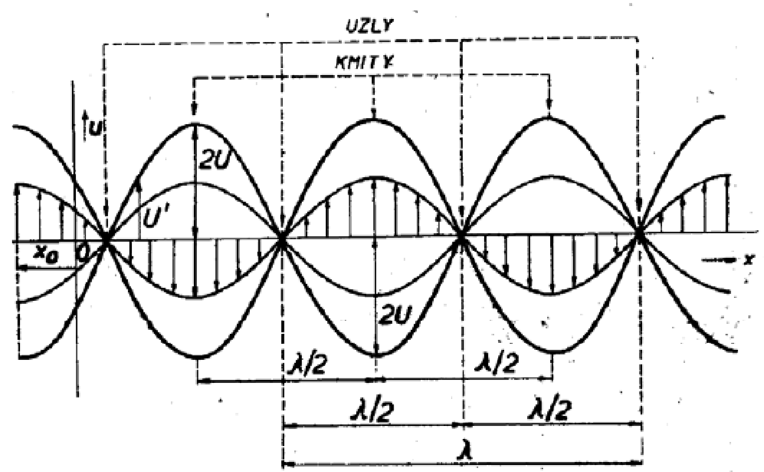
Kmitny (maxima amplitudy): $\cos(kx) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = n\dfrac{\lambda}{2}$

Uzly (minima amplitudy): $\cos(kx) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = (2n-1)\dfrac{\lambda}{4}$

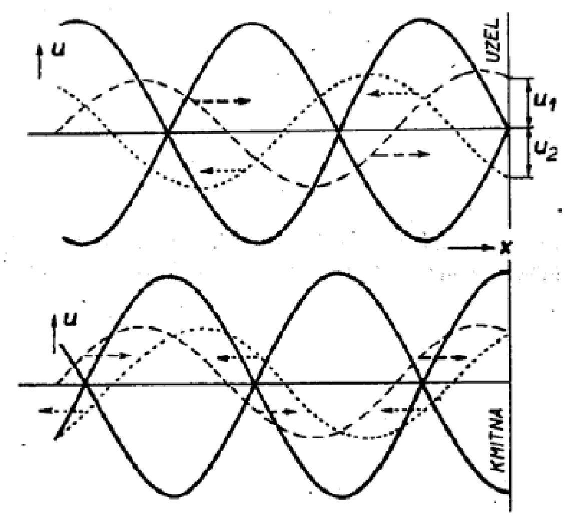
Pozor: stojaté vlny × rázy

Interference vlnění – stojaté vlny

Stojaté vlnění vznikne, když proti sobě postupují stejně polarizované vlny se stejnou frekvencí



Příklad: odraz postupné vlny na pevném nebo volném konci



Pevný konec – odraz s opačnou fází

$\Delta\varphi = \pm\pi$

(na pevném konci je uzel)

Volný konec – odraz se stejnou fází

$\Delta\varphi = 0$

(na pevném konci je kmitna)

Interference vlnění – vlastní módy

Vlny v ohraničené oblasti – vlastní módy

Př. vlna šířící se na struně: rozmístí se podél upnuté struny a kmitá vlastní frekvencí
- např. vznik stojatého vlnění
- projeví se jako chvění materiálu (bodové řady)

A) **Oba konce pevné** (např.struna) – na koncích vznikají uzly, na délce L musí být celistvý počet půlvln:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2L}} \qquad \text{Základní harmonická:} \quad f_1 = \frac{c}{2L}$$

B) **Oba konce volné** – na koncích vznikají kmitny, stejné vztahy jako pro pevné konce

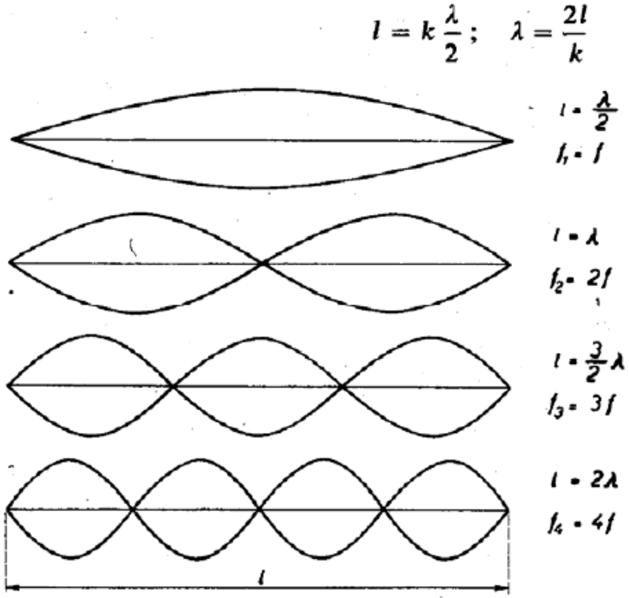
C) **Jeden konec pevný, druhý volný** (např. dechové nástroje) – na pevném konci uzel, na volném kmitna, na délce L je lichý počet čtvrtvln:

$$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{f_n = \frac{c}{\lambda_n} = (2n-1)\frac{c}{4L}} \qquad \text{Základní harmonická:} \quad f_1 = \frac{c}{4L}$$

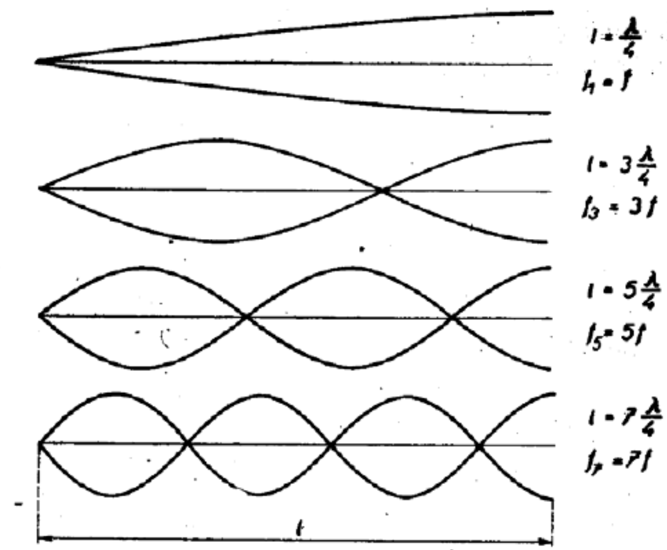
Tedy: frekvence **závisí jak na délce**, tak i **na fázové rychlosti *c*** vlny v daném prostředí, vlastnosti prostředí jsou ve výše uvedených vztazích zahrnuty prostřednictví rychlosti *c*
Př.: optické světlovody, kvantový model atomu

Interference vlnění – vlastní módy

Struna

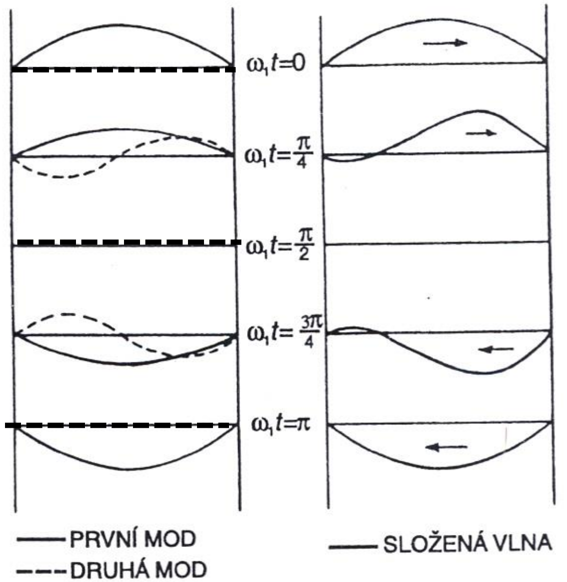


Píšťala



- Pouze vlny **<u>určitých frekvencí</u>** konstruktivně interferují a mohou se šířit na struně
- Existují urč.druhy pohybu, jejichž frekvence závisí jak na vlastnostech soustavy, tak na **<u>povaze hranic</u>**
- Tyto přípustné frekvence se nazývají **<u>vlastní módy soustavy</u>**
- Pohyb takové soustavy lze zkoumat jako současné **vybuzení několika vlastních módů**
- Obecně frekvence vlastních módů soustavy ≠ ω_0 vlastní kmity
- **Př.** Vlny v mechanických soustavách (křídla letadla…)
- Aplikace: **hudební nástroje (barva tónu), rezonanční systémy (mikrovlnná dutina), vlnovody (mikrovlnné, optická vlákna), lasery, antény, elektron v potenciálové jámě (v atomu)**
- Základní úloha takových útvarů – najít vlastní módy studované soustavy

Interference vlnění – stojaté vlny



Dva mody vytvoří při složení postupnou vlnu

Vlny
http://en.wikipedia.org/wiki/Wave

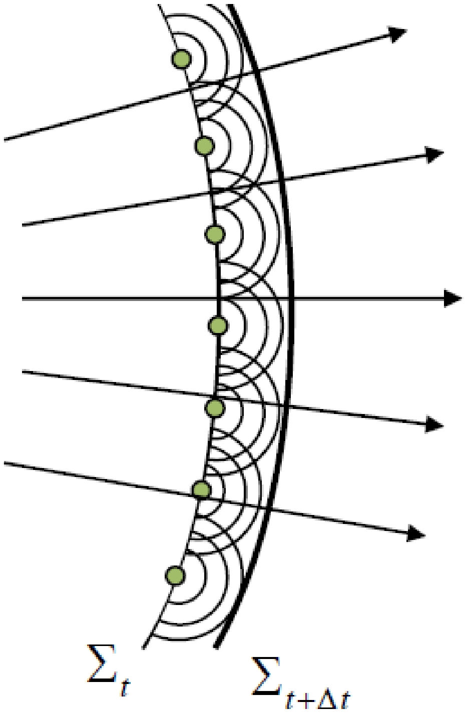
Postupná vlna na struně
http://www.aldebaran.cz/zvuky/

- Elektron v atomu – v QM je reprezentován vlnami
- Vázaný elon – vlny jsou ohraničené, existují pouze určité frekvence (energie), diskrétní hladiny, řešení vlnové Schr. rce
- Volný elon – pokud má dost energie, odtrhne se od atomu – neohraničená soustava – lib. energie

Huygens-Fresnelův princip

Huygens-Fresnelův princip:

Vlnění se šíří prostorem tak, že všechny body, do nichž vlnění dospěje, se stávají bodovými zdroji elementárního vlnění, které se kolem každého bodu rozšíří na elementární vlnoplochy.
Nová výsledná vlnoplocha je obálkou všech elementárních vlnoploch ve směru, v němž se vlnění šíří.



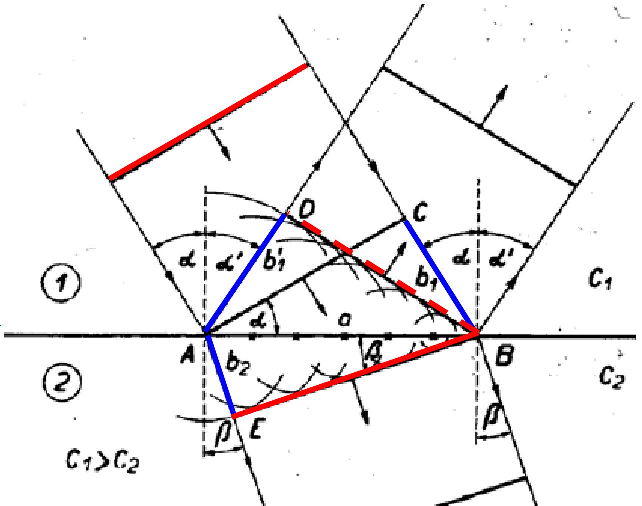
Vlnoplocha – plocha na níž má vlna v daný časový okamžik konstantní fázi $\varphi = \text{konst.}$

Lom a odraz

Lom a odraz vlnění:

- dopadá-li rovinná vlna na rovinné rozhraní potom platí **zákon odrazu a lomu**

$$\alpha = \alpha' \qquad \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{c_2}{c_1}$$



$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2\Delta t}{c_1\Delta t}$$

Fermatův princip (také princip nejkratšího času) – světlo se šíří od jednoho bodu k druhému po takové dráze, aby doba potřebná k proběhnutí dráhy byla nejmenší (přesněji: extremální).

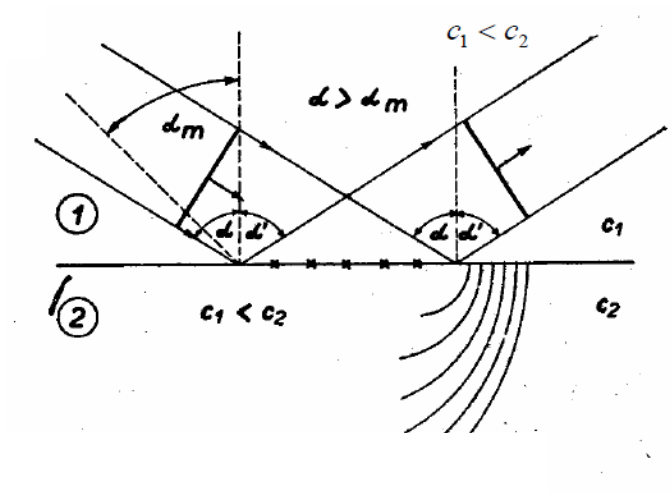
Lom a odraz

Úplný (totální) odraz vlnění:

- pokud platí: $c_1 < c_2$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{c_2}{c_1} > 1$$



mezní (kritický) úhel:

$$\boxed{\sin\alpha_m = \frac{c_1}{c_2} = n_{12}}$$

$\Rightarrow$ Nenastává lom vlnění, dopadající vlna se totálně odráží

- pokud platí: $c_1 > c_2$, potom k lomu do „pomalejšího" prostředí dojde vždy (zvuk z kovových předmětů se vždy vyzáří do vzduchu)

Př. **zvukovody** (lib.trubice)

<u>Příklad:</u> (odraz zvukových vln na hladině jezera)

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = 340\ \mathrm{m/s} \\ c_2 = 1450\ \mathrm{m/s} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_m = \arcsin\frac{c_1}{c_2} = 13^\circ 30$$

téměř všechno šikmo dopadající vlnění se totálně odráží a nad hladinou se šíří velmi dobře zvuk

pozn. odraz zvuku od silnice

Vlastnosti vln

Rychlost šíření podélných c_L a příčných c_P vln v různých materiálech

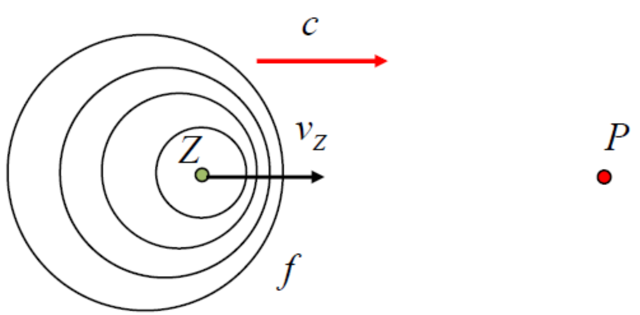
Materiál	Fázová rychlost c_L [m/s]	Fázová rychlost c_P [m/s]
ocel	5900-6000	3260
hliník	6320	3080
sklo	5570	3515
dřevo	4300	900
beton	5400	3400
rtuť	1450	-
voda	1480	-
vzduch (20°C)	340	-
vzduch (0°C)	331,8	-

Dopplerův jev

Dopplerův jev: frekvence přijímaného vlnění závisí na vzájemném pohybu zdroje a pozorovatele

Význačné případy (předp.: prostředí je v klidu):

a) pohyb zdroje, pozorovatel v klidu



"zhuštění" vln

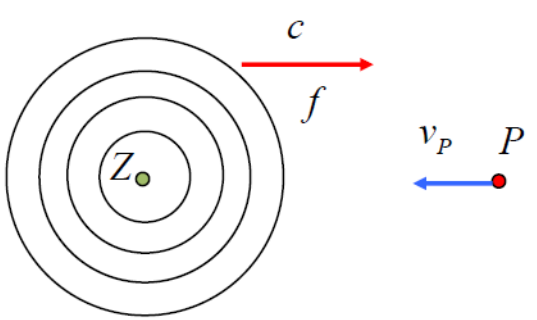
vlnové délka je směrem k pozorovateli o $\Delta\lambda = v_z T$ kratší:

$$\lambda' = \lambda - \Delta\lambda = cT - v_z T = \frac{c - v_z}{f}$$

Vnímaná frekvence vlnění:

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda - \Delta\lambda} = f\,\frac{c}{c - v_Z}$$

b) pohyb pozorovatele, zdroj v klidu



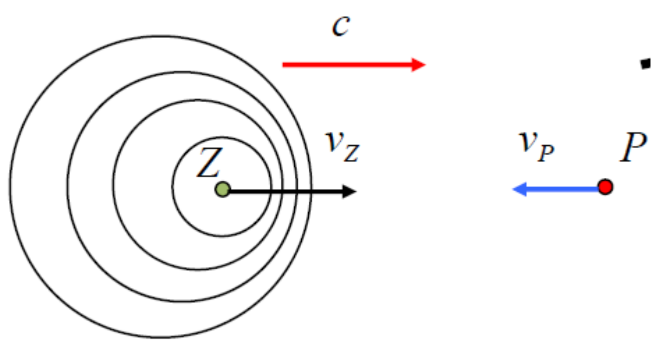
vůči pozorovateli má vlnění rychlost $c + v_p$

Vnímaná frekvence vlnění:

$$f' = \frac{c + v_P}{\lambda} = f\,\frac{c + v_P}{c}$$

Dopplerův jev

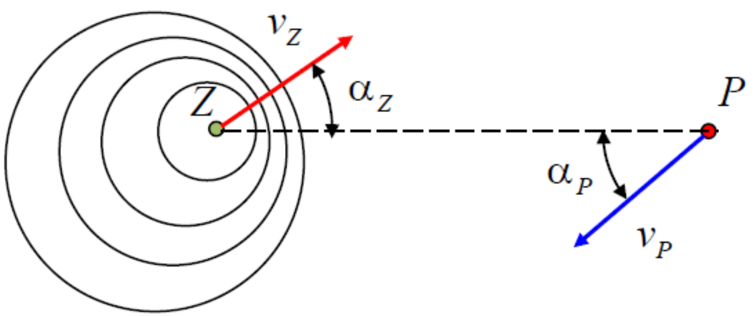
c) pohyb pozorovatele i zdroje



Vnímaná frekvence vlnění (pohyb proti sobě):

$$f' = \frac{c + v_P}{\lambda - \Delta\lambda} = f\,\frac{c + v_P}{c - v_Z}$$

Pozn.: rychlosti v_P, v_Z jsou kladné, pokud se zdroj a pozorovatel k sobě přibližují, záporné, pokud se vzdalují !



Při šikmém pohybu:

$$\boxed{f' = f\,\frac{c + v_P \cos\alpha_P}{c - v_Z \cos\alpha_Z}}$$

d) pohybuje se též prostředí rychlostí *w* ve směru šíření vlnění – do rovnic za rychlost c nutno dosadit $c \to c + w$

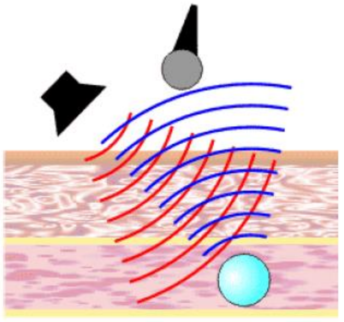
Pozn. Je zřejmé, že ke změně frekvence <u>nedochází</u>, pokud se zdroj i pozorovatel pohybují stejným směrem stejnou rychlostí, (podobně pokud jsou zdroj i pozorovatel v klidu a pohybuje se jen prostředí – na koncertě funí vítr, hudbu to neovlivní)

Dopplerův jev

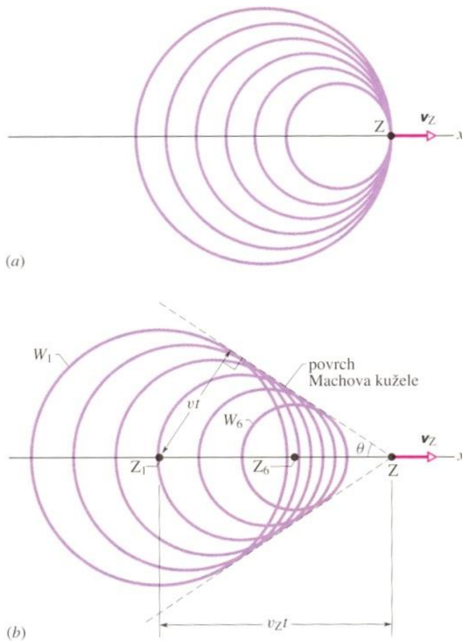
Shrnutí : Pokud se oscilátor, který je zdrojem vlnění, a pozorovatel vůči sobě pohybují, potom při vzájemném přibližování je frekvence přijímaného vlnění vyšší a při vzdalování nižší.

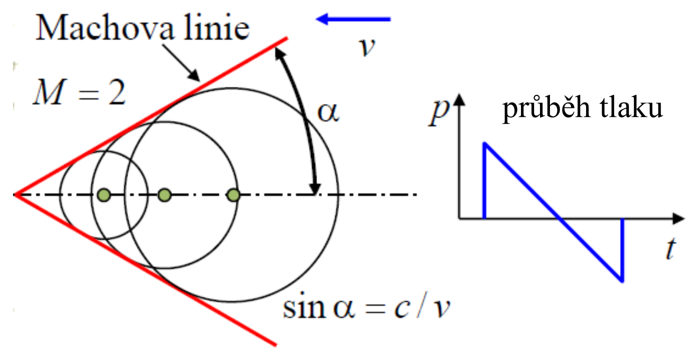
Aplikace : **měření vibrací konstrukcí (akustické, optické)**
měření rychlosti, rychlosti proudění
Dopplerovský radar (metrologie, policie)
Dopplerovský sonar
Dopplerovská ultrasonografie,…

Optický Dopplerův jev (barevné posuvy)



Dopplerův jev





dochází ke skokové změně (poruše, rázu) hustoty a tlaku – vzniká **rázová vlna**, která se šíří prostředím

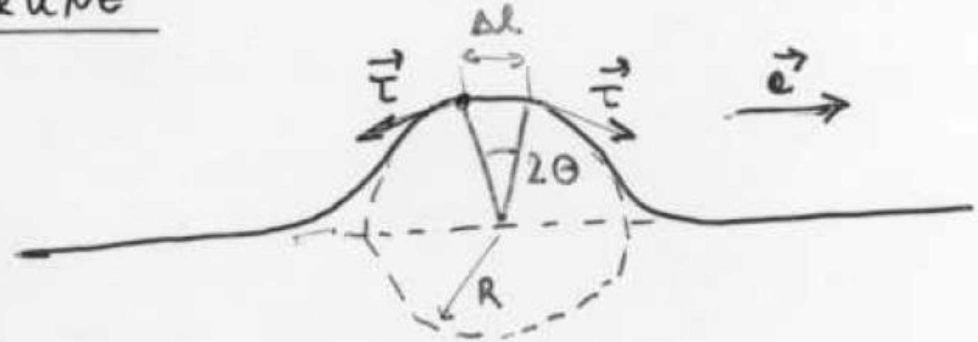
Pozn. k obr.: při proražení Machova kužele dochází k adiabatické expanzi na odtokové hraně křídel → prudké snížení teploty a kondenzace vodních par, při rychlostech < rychl.zvuku se nic podobného nepozoruje

Vlny
http://en.wikipedia.org/wiki/Wave

RYCHLOST VLNY NA STRUNĚ

(z 2. NZ)

příčná vlna



SS spojená s pulzem:

- napětí ve struně × příčné výchylce

vratná síla: $F = F_n = 2\tau \sin\Theta \approx 2\tau\Theta = \tau \frac{\Delta l}{R}$

- odstředivá síla: $F = \Delta m \cdot a = \rho_l \Delta l \cdot \frac{c^2}{R}$

$$\left.\begin{array}{l} F = \tau \frac{\Delta l}{R} \\ F = \rho_l \Delta l \frac{c^2}{R} \end{array}\right\} \boxed{c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_l}}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

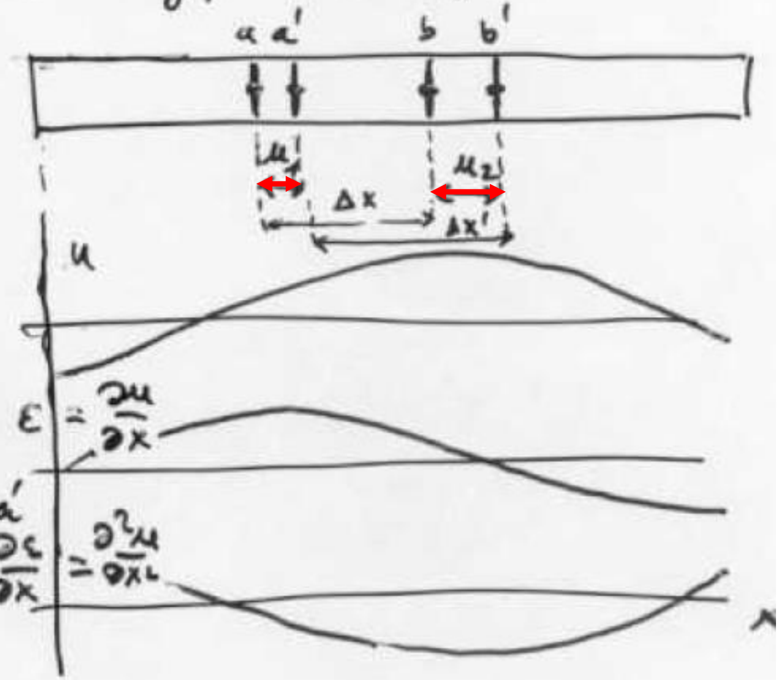
($\tau \equiv F$, $\sigma = F/S$ napětí, ρ hustota, ρ_l délková hustota)

⇒ c závisí jen na parametrech struny (nikoli na ω)
ω závisí na způsobu vybuzení vlny, hraničních podmínkách.

Závěr: fázová rychlost <u>ideální struny</u> nezávisí na vlnové délce, ale jen na parametrech struny – **<u>nedisperzní prostředí</u>**, tj. platí $\omega = ck$, tedy v_f i v_g jsou stejné.

Pozn. <u>Reálná (tuhá) struna</u> - ω závisí na k viz str. 37 … disperzní prostředí

RYCHLOST VLNY V TYČI (podélné vlny) – odvození vln. rce



posunutí : u_1, u_2

$$\Delta x' - \Delta x = u_2 - u_1 = \Delta u$$

deformace relativní :

$$\varepsilon = \frac{\Delta u}{\Delta x} \to \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

pozn.: $\varepsilon = f(x)$ .... při podélném vlnění je def. v každé části jiná

$$d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

Hooke : $F = SE\varepsilon$

$$dF = SE\,d\varepsilon = SE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

2.NZ : $dF = a \cdot dm = a \cdot \rho S dx = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho S dx$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \underbrace{\frac{\rho}{E}}_{1/c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Leftarrow \quad \boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

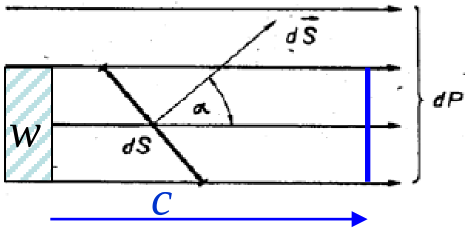
E - Youngův modul,
K - modul objemové pružnosti,
ρ - hustota

$$c_L = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

kapaliny

Fázová rychlost nezávisí na vlnové délce, ale jen na vlastnostech prostředí - nedisperzní prostředí

Energie, intenzita vlnění



Výkon – tok energie: $$P = \frac{dE}{dt} \quad [\mathrm{W}]$$

Střední tok energie - výkon: $$\langle P \rangle = \frac{\langle E \rangle}{\Delta t} \quad [\mathrm{W}]$$

Objemová hustota energie:

$$w = \frac{dE}{dV} \quad \left[\mathrm{J/m^3}\right]$$

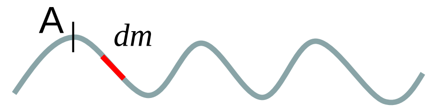
Intenzita vlnění:

časová střední hodnota proudové hustoty energie $$I = \frac{\langle E \rangle}{S_\perp \Delta t} = \langle cw \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T cw\,dt \quad \left[\mathrm{W/m^2}\right]$$

(neboť $\langle E \rangle = w \cdot S_\perp c \Delta t$)

Energie, intenzita vlnění

Struna – příčná vlna, <u>přenášený výkon</u>



$$dE = \frac{1}{2} dm \cdot v^2$$

$$dE = \frac{1}{2} dm\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho_l dx \omega^2 A^2$$

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \rho_l \omega^2 A^2 \frac{dx}{dt} = \underline{\frac{1}{2} \rho_l c\, \omega^2 A^2}$$

<u>Intenzita</u> při podélném vlnění (např. vzduchového sloupce)

$$dE = \frac{1}{2} dm\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho S dx \omega^2 A^2$$

$$I = \frac{1}{S} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \rho\, \omega^2 A^2 \frac{dx}{dt} = \underline{\frac{1}{2} \rho\, c\, \omega^2 A^2}$$

Hladina intenzity (zvuku) vztažená k referenční hladině I_0

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad [\mathrm{dB}]$$

Práh slyšitelnosti (prahová hladina slyšitelnosti při 1kHz)

nejnižší slyšitelná intenzita referenčního tónu

$$I_0 \doteq 10^{-12}\ \mathrm{Wm^{-2}}$$

Práh bolestivosti

nejvyšší intenzita vnímaného zvuku, která ještě nezpůsobí bolest

$$I_{max} \doteq 10\ \mathrm{Wm^{-2}}$$

Grupová rychlost

uvažujme případ interference 2 harmonických vln s různými, ale málo odlišnými frekvencemi a vlnovými délkami

$$u_1 = u_0 \cos[\omega_1 t - k_1 x] \qquad u_2 = u_0 \cos[\omega_2 t - k_2 x]$$

$$u = u_1 + u_2 = 2u_0 \cos\left[\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t - \frac{k_2 - k_1}{2} x\right] \cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right]$$

$$u \cong 2u_0 \cos\left[\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right] \cos[\omega t - kx] = \underbrace{2u_0 \cos\left[\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta k} t - x\right)\frac{\Delta k}{2}\right]}_{\text{Amplituda vlny } A(x,t)} \cos\left[\left(\frac{\omega}{k} t - x\right)k\right]$$

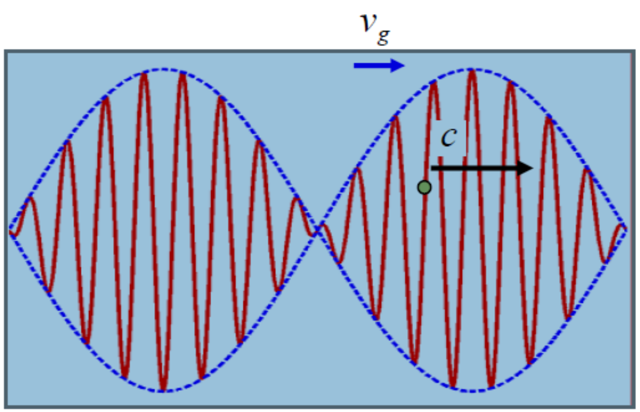
$$c_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

grupová rychlost: $c_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$

fázová rychlost: $c = \dfrac{\omega}{k}$

místa stejné fáze se šíří **fázovou rychlostí**

vlna je rozdělena na jednotlivé grupy (vlnové balíky), které se šíří tzv.**grupovou rychlostí**



$I \sim A^2 \Rightarrow$ **energie se šíří grupovou rychlostí !!**

Grupová rychlost

grupová rychlost: $c_g = \dfrac{d\omega}{dk}$

fázová rychlost: $c = \dfrac{\omega}{k}$

Disperze: $\omega = \omega(k) \Rightarrow \Delta\omega \doteq \dfrac{d\omega}{dk}\Delta k$

$c = c(\omega)$

V disperzním prostředí se grupová a fázová rychlost liší !

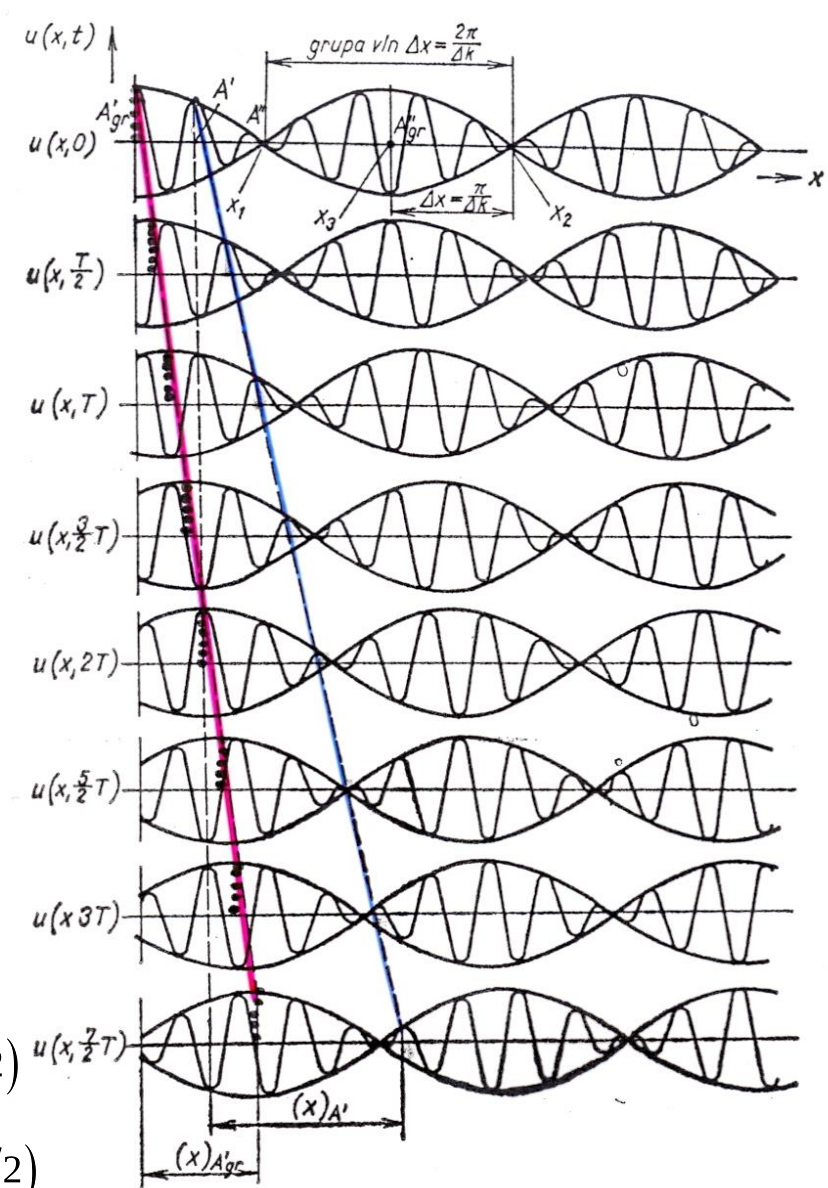
Př.: fázová rychlost <u>ideální struny</u> nezávisí na λ, ale jen na parametrech struny $\rightarrow$ <u>nedisperzní prostředí</u>, tj. platí $\omega = ck$, tedy v_f i v_g jsou stejné, viz. str. 33.

Pro <u>tuhou (reálnou) strunu</u> ω není lin. fcí k, fázová v_f i grupová v_g rychlost závisí na k, tedy na vlnové délce $\rightarrow$ tzv. <u>disperzní prostředí (</u>v_f a v_g se liší:

$$\omega = ck\left(1+\alpha k^2\right)^{1/2} \approx ck\left(1+\alpha k^2/2\right), \text{ tj. } v_f = \frac{\omega}{k} \approx c\left(1+\alpha k^2/2\right)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \approx c\left(1+3\alpha k^2/2\right)$$

(zde α<0 je parametr struny)



GRUPOVÁ RYCHLOST – OBECNĚ

vlny v pásmu Δk, $\Delta\omega$

$$u = \sum_k u_k, \quad u_k = a(k)\, e^{i(kx-\omega t)}, \quad k_0-\Delta k \le k \le k_0+\Delta k$$

$$u = \int a(k)\, e^{i(kx-\omega t)}\, dk, \quad a(k) = a(k_0)\ \forall k$$

$$= a(k_0) \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} e^{i(kx-\omega t)}\, dk$$

disperze (slabá): $\omega = \omega(k) \simeq \omega(k_0) + \frac{d\omega}{dk}(k-k_0) + \dots$

$$= \omega_0 + v_g(k-k_0) \quad ; \text{kde } v_g \equiv \frac{d\omega}{dk}$$

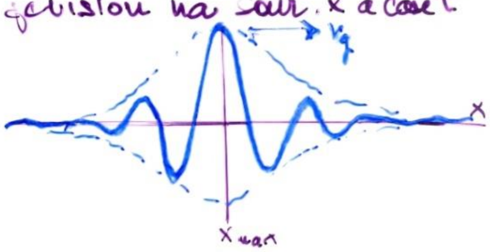
$$kx - \omega t = (k_0x - \omega_0 t) + (k-k_0)(x-v_g t)$$

$$u = a(k_0)\, e^{i(k_0x-\omega_0 t)} \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} e^{i(k-k_0)(x-v_g t)}\, dk = \dots \int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{ibK} dK =$$

$$= \dots\left(e^{ib\Delta k} - e^{-ib\Delta k}\right)/ib = 2a_0 \frac{\sin (x-v_g t)\Delta k}{(x-v_g t)}\, e^{i(k_0x-\omega_0 t)}$$

... postupná vlna ω_0, k_0 s amplitudou závislou na souř. x a čase t

vlnový balík / vlnové klubko – $\sin y / y$



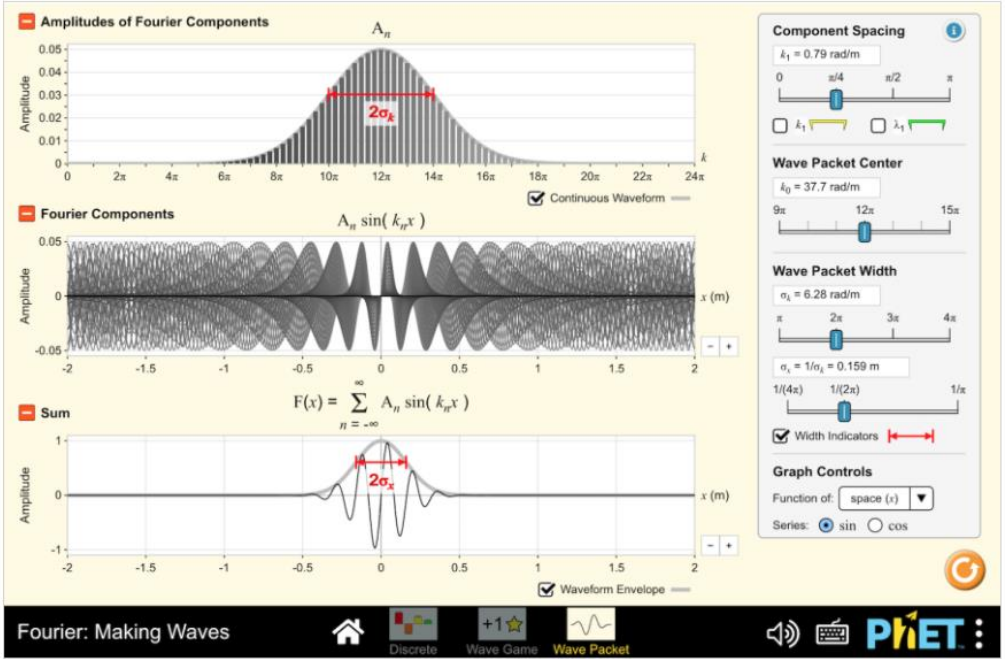
maximum amplitudy při $x - v_g t = 0$

$x - x_{max} = \Delta x$

amplitude postupuje rychlostí v_g

intenzita $\sim A^2$ ⇒ energie vlnového rozruchu se šíří rychlostí v_g

Fourier: Making Waves



http://phet.colorado.edu/en/simulation/fourier