

6. Kmity a vlnění

Anotace:

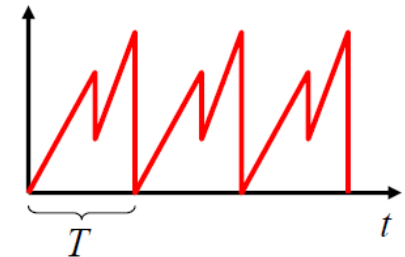
Kmity tlumené, vynucené, skládání kmitů, vázané kmity, aperiodický tlumený pohyb, rezonance. Pojem vlny, vlnová rovnice, rovinná vlna. Energie a intenzita vlny. Harmonická vlna, způsoby popisu, vztah vlnová délka-rychlost-frekvence. Fázová rychlost a grupová rychlost. Typy vlnění, polarizace. Princip superpozice, interference vlnění, stojaté vlnění. Huygensův princip, lom, odraz. Dopplerův jev.

Kmity - částice (resp. soustava částic, obecně fyzikální veličina) kmitá (tj. osciluje) kolem rovnovážné polohy – koná harmonický pohyb:
harmonický oscilátor

Periodický průběh veličiny sledované veličiny: $Y = Y(t + T)$

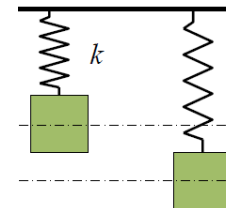
Perioda T , frekvence f , kruhová frekvence

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$$



Chování v okolí bodu stabilní rovnováhy

Např.: kyvadlo, závaží na pružině



Harmonický oscilátor

Harmonický (lineární) oscilátor

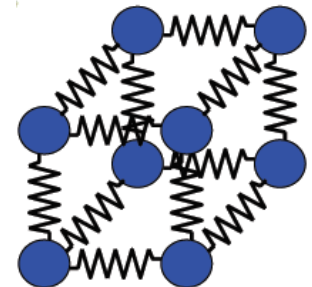
Částice pohybující se v potenciálu:

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2, \quad k > 0 \quad (\text{vazba})$$
$$F_i = -\frac{\partial E_p}{\partial x_i} = -kx \quad \text{vratná síla}$$

Harmonické oscilace kolem $x = 0$, s úhlovou frekvencí $\omega^2 = k/m$

Řadu systémů lze popsat (alespoň přibližně) rovnicemi harmonického oscilátoru, např.:

- Vibrace atomů v molekule
- Kmity atomů nebo iontů v krystalu
- Elektromagnetické kmity v dutině
- Plazmové kmity
- Oscilace LC obvodu
- Kmity mechanických soustav



Harmonické kmity - netlumené

Pohybová rovnice:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

(homogenní diferenciální rce 2. řádu)

Hledejme řešení: $x = Ce^{\alpha t} \Rightarrow$ charakteristická rce: $\alpha^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$

Obecné řešení: $x = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$ (lin.kombinace 2 nezávislých řešení)

$$= (C_1 + C_2) \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + i(C_1 - C_2) \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t \quad (\text{Euler: } e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x)$$

x musí být reálné ($C_1, C_2 - kpx$, tj. 4 parametry), musí být $C_1 = C_2^*$ kpx sdružené

Označme: $C_1 + C_2 = A \sin \alpha$

$$i(C_1 - C_2) = A \cos \alpha$$

Potom výchylka:

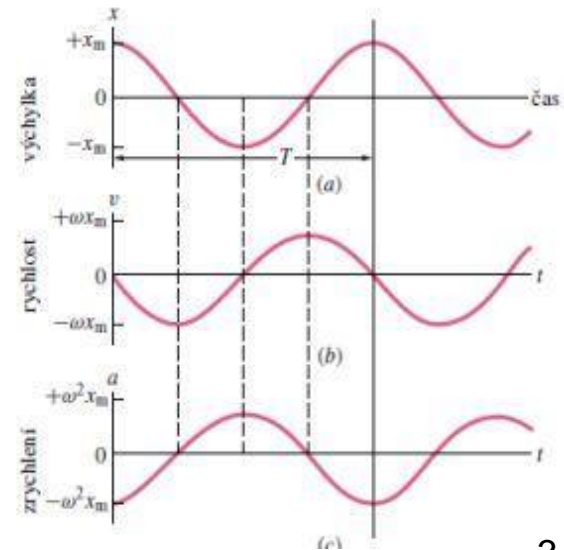
$$x = A \sin(\omega t + \alpha), \quad \text{kde } \omega = \sqrt{k/m}$$

Rychlost $v = \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \alpha)$ amplituda: $v_0 = A\omega$

Zrychlení $a = \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$ $a_0 = -A\omega^2$

Pozn. Harmonický pohyb je jediný, který vzniká pod vlivem vratné síly

$\omega = \sqrt{k/m}$ - vlastní frekvence



Harmonické kmity – formy matematického popisu

$$\rightarrow x(t) = A \cos(\underbrace{\omega t + \varphi}_{\text{fáze}})$$

$$\rightarrow x(t) = B_S \sin \omega t + B_C \cos \omega t \quad \text{kde } B_S = -A \sin \varphi, \quad B_C = A \cos \varphi$$

$$\rightarrow x(t) = C e^{i\omega t} + C^* e^{-i\omega t} \quad \text{kde } C = (A/2) e^{i\varphi} \quad \text{tedy } \operatorname{Re} C = B_C/2 = (A/2) \cos \varphi$$
$$\operatorname{Im} C = B_S/2 = (A/2) \sin \varphi$$

$$\rightarrow x(t) = \operatorname{Re}(D e^{i\omega t}) \quad \text{kde } D = A e^{i\varphi} = 2C \dots \text{kpx}$$
$$= \operatorname{Re}(A e^{i(\omega t + \varphi)}) \quad A \dots \text{real}$$

V praxi píšeme:

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t) &= D e^{i\omega t} \\ &= D e^{-i\omega t} \end{aligned}} \quad \dots \text{ pouze reálná část má fyzikální smysl, } D \dots \text{ kpx.}$$

Eulerův vzorec: $e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$

Harmonické kmity - netlumené

Kinetická energie: $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha)$, hybnost částice $p = m\dot{x}$

Potenciální en.: $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \alpha)$ $\left(= -W = \int_{x_0}^x k(x - x_0) dx \right)$
 (závislost E_p je parabolická)

Celková energie: $E_c = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$ nezávisí na čase, (konz. síly)

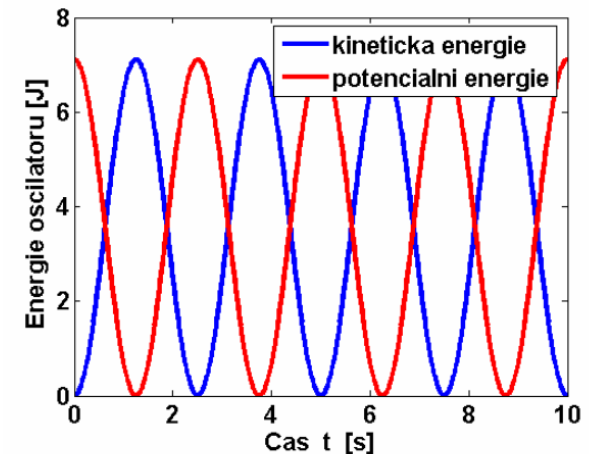
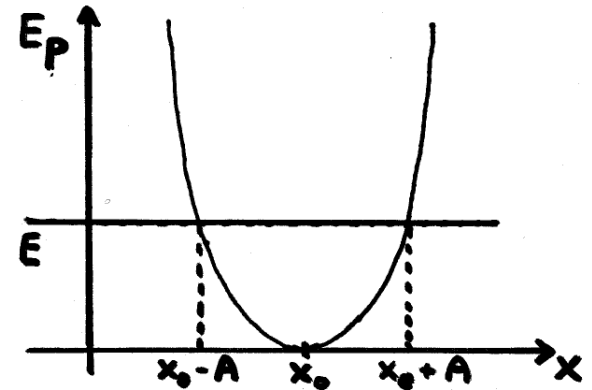
ω - vlastní frekvence
 T - perioda

Úloha – vypočtete:

a) rychlost částice v bodě x $\left(v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \right)$

- b) - hustotu pravděpodobnosti výskytu částice, $w(x)$
 - pravděpodobnost výskytu částice v intervalu $\Delta x = (a, b)$
 - nakreslete graf $w(x)$

$$\left(w(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}, \quad P_{a,b} = \int_a^b w(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\arcsin \frac{x}{A} \right]_a^b \right)$$

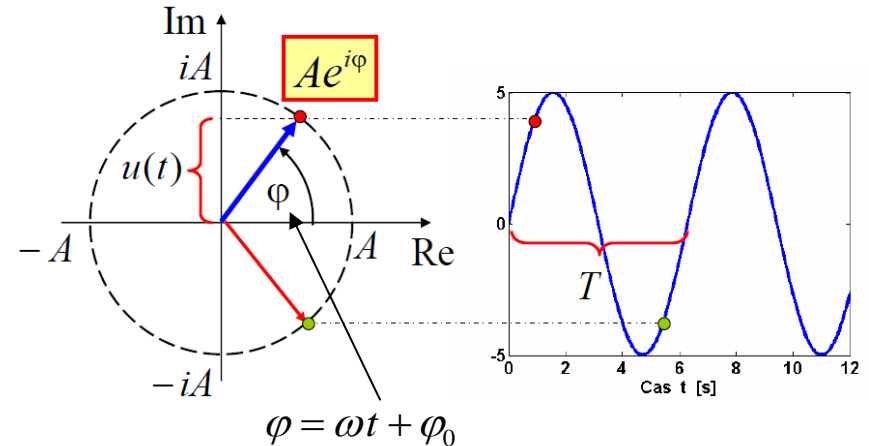


Harmonické kmity – komplexní vyjádření

$$x = A \cos(\overbrace{\omega t + \varphi_0}^{\varphi \dots \text{ fáze}})$$

$$\hat{x} = A e^{i(\omega t + \varphi_0)} \quad \text{časový vektor (fázor)}$$

Zobrazení v kpx rovině –
fázor rotuje s úhlovou frekvencí ω



$$z = x + iy = A e^{i\varphi} = A(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Harmonické kmity - tlumené

Vliv tření (tlumení) – odhad výsledku:

Amplituda: $p^n A$, $p \in \langle 0, 1 \rangle$, tedy $n \sim t$ (času)

Očekávaný výsledek: $p^{kt} A = e^{\ln p \cdot kt} A = e^{-\alpha t} A$, kde $\alpha = k \cdot \ln p > 0$

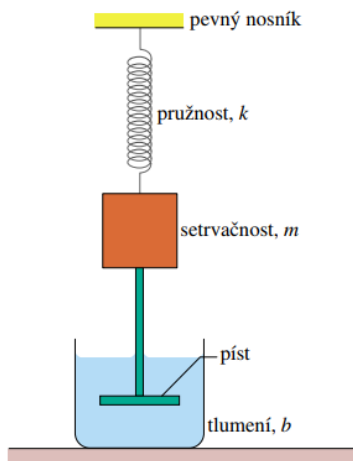
\Rightarrow amplituda tedy exponenciálně klesá

Př:

mechanické tlumiče (auto, mechaanické váhy,....téměř lib.mechanická konstrukce
vystavená dynamickým silám)

elektrické obvody

Model:



Harmonické kmity - tlumené

Tlumící síla: $F_{ox} = -bv = -b\dot{x}$

$$b = \text{konst.}, b > 0$$

2.N.Z.: $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

označení: $\frac{k}{m} = \omega_0^2$; $\frac{b}{m} = 2\delta$; $\delta \dots$ součinitel tlumení
 $\omega_0 \dots$ vlastní frekvence

(15) $\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2x = 0}$

- (15) je lineární diferenciální rovnice, řešení hledáme ve tvaru $x(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha = \text{konst.}$
- dosazením $x(t)$ do (15) získáme charakterickou rovnici:

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0 \quad \underline{\underline{\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}}$$

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\omega ; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} ; \omega \dots \text{úhlová frekvence } (\omega < \omega_0)$$

Harmonické kmity - tlumené

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

a) nadkritický útlum

$\delta > \omega_0$: *aperiodický pohyb (velké tlumení)*

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0, \text{ reálné}$$

– 2 lineárně nezávislá řešení: $x_1(t) = e^{\alpha_1 t}$, $x_2(t) = e^{\alpha_2 t}$

– obecné řešení je jejich lineární kombinací:

$$x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$$

$\alpha < 0$, tj. exponenciální útlum, žádné kmity

$C_1, C_2 = \textit{konst.}$ (určeny počátečními podmínkami)

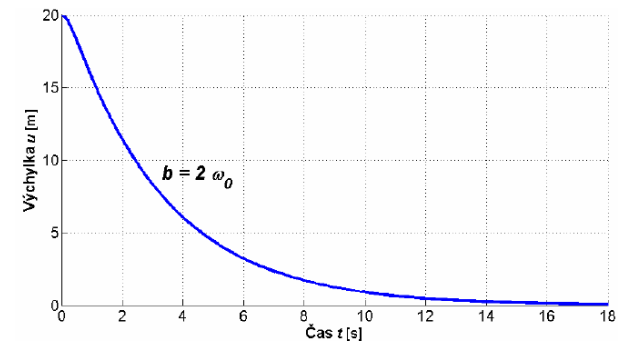
Rychlost kmitů: $v = \frac{dx}{dt} \longrightarrow v = \alpha_1 C_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 C_2 e^{\alpha_2 t}$

Př.: počáteční podmínky: $t = 0 \Rightarrow x = A_M, v = 0$

řeš.:

$$x = \frac{A_M}{\alpha_1 - \alpha_2} (\alpha_1 e^{\alpha_2 t} - \alpha_2 e^{\alpha_1 t})$$

Pozn.: Po vychýlení se oscilátor vrací do rovnováhy, (v konečném čase ji nedosáhne), nedochází ke kmitům



Harmonické kmity - tlumené

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

b) kritický útlum $\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\omega$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$; $\omega \dots$ úhlová frekvence ($\omega < \omega_0$)

$\delta = \omega_0$: *mezní aperiodický pohyb*

$$\alpha_{1,2} = -\delta < 0$$

– 2 lineárně nezávislá řešení: $x_1(t) = e^{-\delta t}$, $x_2(t) = te^{-\delta t}$

– obecné řešení je jejich lineární kombinací:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\delta t}$$

$A, B = konst.$ (určeny počátečními podmínkami)

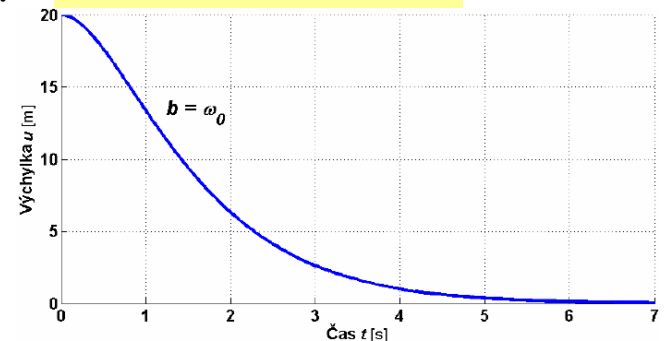
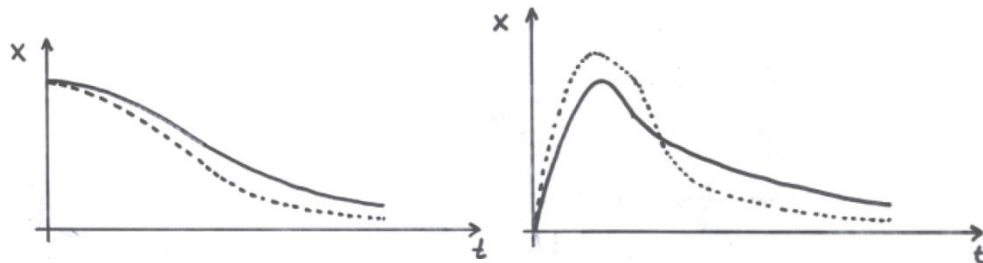
pozn. oscilátor projde nulou (rovnovážnou polohou) pro $t = -A/B$, a pro $t \rightarrow \infty$ konverguje k 0 rychleji, než v aperiodickém případě, nedochází ke kmitům

Rychlost: $v = \frac{dx}{dt} = e^{-\omega_0 t} (B(1 - \omega_0 t) - \omega_0 A)$

Př.: počáteční podmínky: $t = 0 \Rightarrow x = A_M, v = 0$

řeš:

$$x = A_M e^{-\omega_0 t} (1 + \omega_0 t)$$



Harmonické kmity - tlumené

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

c) Slabé tlumení

$\delta < \omega_0$: *tlumený harmonický kmit (malé tlumení)*

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\omega ; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} ; \omega \dots \text{úhlová frekvence } (\omega < \omega_0) \quad \alpha \text{ komplexní}$$

– 2 lineárně nezávislá řešení: $x_1(t) = e^{-\delta t + i\omega t}$, $x_2(t) = e^{-\delta t - i\omega t}$

– obecné řešení je jejich lineární kombinací:

$$x(t) = C_1 e^{-\delta t + i\omega t} + C_2 e^{-\delta t - i\omega t} = e^{-\delta t} (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t})$$

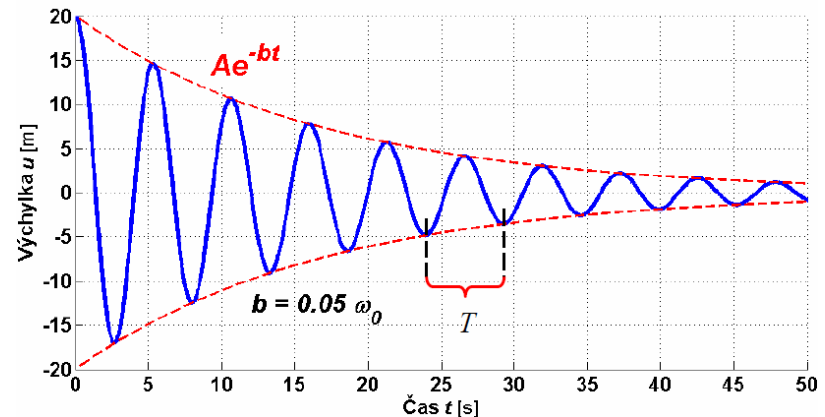
$$x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad C_1, C_2, A, \varphi_0 = \textit{konst.} \text{ (určeny počátečními podmínkami)}$$

↑
pozn. Amplituda se exponenciálně zmenšuje, oscilátor projde nulou (rovn.polohou) mnohokrát

Rychlost kmitů: $v = -A e^{-\delta t} (\omega \sin(\omega t + \varphi_0) + \delta \cos(\omega t + \varphi_0))$

Perioda: $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$

Energie: $E_c = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 e^{-2\delta t}$



Harmonické kmity - tlumené

Charakteristiky tlumených oscilací:

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

- **útlum:**

-podíl dvou výchylek soustavy, lišících se o 1 periodu $\beta = \frac{x(t)}{x(t+T)} = \frac{Ae^{-\delta t} \cos(\dots)}{Ae^{-\delta(t+T)} \cos(\dots)} = e^{\delta T}$

- **logaritmický dekrement útlumu:** $\mathcal{G} = \ln \beta = \delta T$

- **činitel jakosti kmitající soustavy:**

- 2π násobek poměru energie oscilátoru $W(t)$ k úbytku energie soustavy za dobu 1 periody

$$W(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2(t)$$



$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}}$$

vyjadřuje kvalitu oscilátoru

Harmonické kmity - vynucené

Na oscilátor působí kromě vratné síly a tlumení ještě časově proměnná vnější budící síla:

$$F = F_0 \cos \Omega t, \quad \Omega \text{ úhlová frekvence budící síly}$$

ω_0 vlastní úhlová frekvence volného oscilátoru

2.N.Z.: $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \Omega t$ označení: $\frac{k}{m} = \omega_0^2$; $\frac{b}{m} = 2\delta$; $\frac{F_0}{m} = S$

$$\underline{\underline{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = S \cos \Omega t}}$$

V komplexní symbolice:

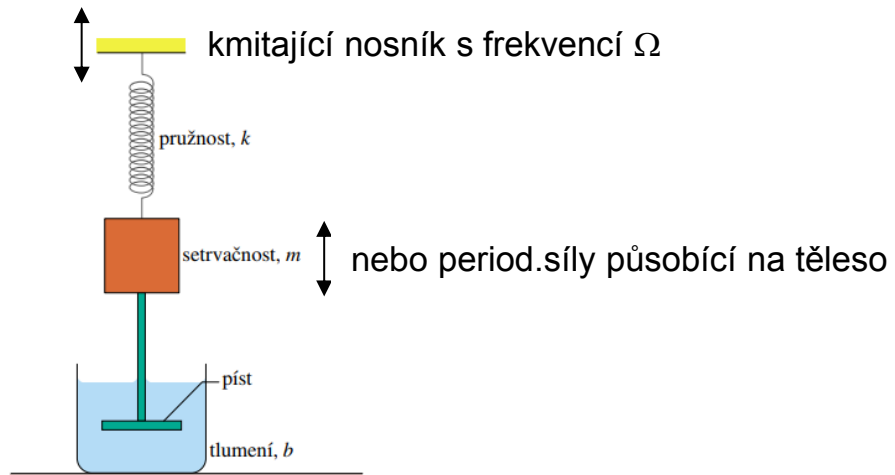
$$\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = S e^{i\Omega t}} \quad (18)$$

Ot.: bude řešení stejné i v kpx symbolice? Jaké je řešení pro časově neproměnnou sílu?

Lin. dif. rce 2.řádu s pravou stranou:

obecné řešení = řešení homogenní rce (tj. bez pravé strany, to už známe) + jedno partikulární řešení úplné rce s pravou stranou

Hledáme tedy partikulární řešení



Harmonické kmity - vynucené

$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = S e^{i\Omega t}$, kde $S = F_0/m$, $\omega_0^2 = k/m$ je vlastní frekvence

Hledáme partikulární (stacionární) řešení ve tvaru $x_p = x_0 e^{i\Omega t}$, tj. hledáme x_0 . Dosazením:

$$x_0 e^{i\Omega t} (-\Omega^2 + i2\delta\Omega + \omega_0^2) = S e^{i\Omega t} \Rightarrow$$

$$x_0 = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\delta\Omega}$$

... kpx amplitudu x_0 přepíšeme do tvaru:

$$x_0 = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - i2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} \equiv |x_0| e^{i\varphi}, \quad \text{tj. } x_p = |x_0| e^{i(\Omega t + \varphi)} \quad \text{kde } \varphi \dots \text{ fáze} \Rightarrow$$

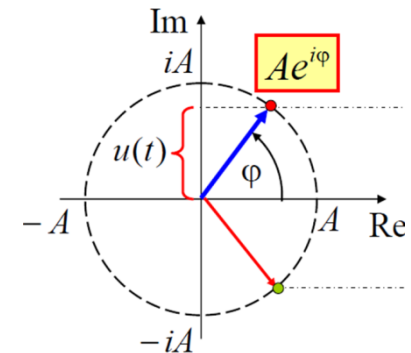
stacionární řešení

$$\tan \varphi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

fázový posun výchylky vůči působícímu poli
(výchylka se zpožďuje za silou)

$$|x_0| = \sqrt{x_0 x_0^*} = \frac{F_0/m}{\left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2 \right)^{1/2}}$$

amplituda ustálených kmitů



$$\text{Euler: } z = x + iy = A e^{i\varphi} = A(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Harmonické kmity - vynucené

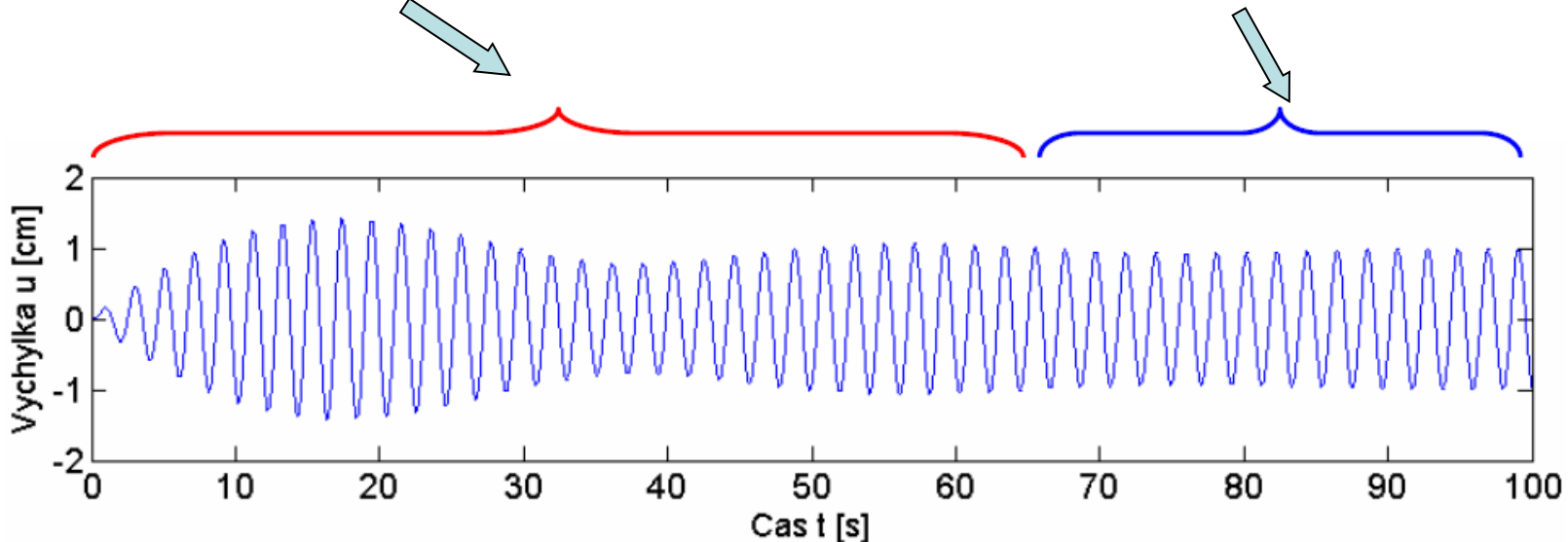
úplné řešení: $x(t) = \underbrace{C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}}_{\text{viz tlumený oscilátor}} + \underbrace{x_0 e^{i\Omega t}}_{x_p} \quad C_1, C_2, \alpha_{1,2} = \textit{konst.}$

Real část: $x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0) + |x_0| \cos(\Omega t + \varphi)$

$$x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{F_0/m}{\left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2 \right)^{1/2}} \cos(\Omega t + \varphi) \quad \text{kde } \varphi = \arctan \frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

přechodové řešení
exp.ubývá, zaniká s časem

stacionární řešení
ustálený stav



Harmonické kmity - vynucené

$$|x_0| = \frac{F_0/m}{\left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2 \right)^{1/2}}$$

$$\tan \varphi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Stacionární řešení, amplituda vynucených kmitů závisí na frekvenci budící síly Ω :

$$d|x_0|/d\Omega = 0 \Rightarrow$$

$$\Omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad \text{rezonanční frekvence}$$

$$\text{pro slabé tlumení } \delta \ll \omega_0 : \Omega_{res} \rightarrow \omega_0$$

$$|x_0|_{max} = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \quad \text{amplituda v rezonanci}$$

$$|x_0|_{max} \rightarrow \infty$$

Rezonance - jev, kdy při kmitání malá budící veličina způsobí velkou odezvu jiné veličiny (zde rezonance výchylky způsobená budící silou) - rezonanční zesílení

Harmonické kmity vynucené - grafy

Rezonanční křivky:

$$|x_0| = \frac{F_0/m}{\left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right)^{1/2}}$$

$$\Omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad \text{rez. frekvence}$$

$$|x_0|_{max} = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \quad \text{amplituda v rez.}$$

Fázový posuv φ při rezonanci:

$$\tan \varphi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$\Omega = \Omega_R$$



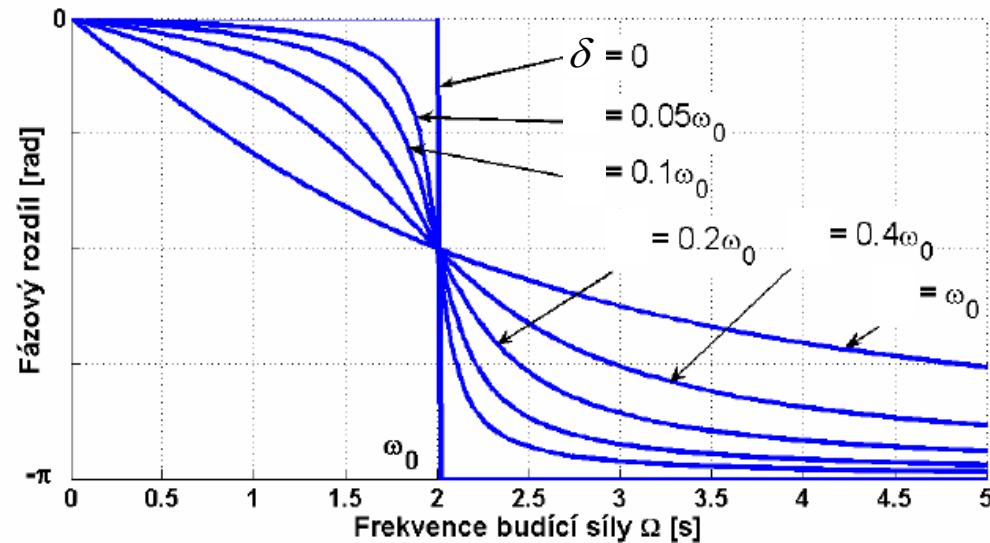
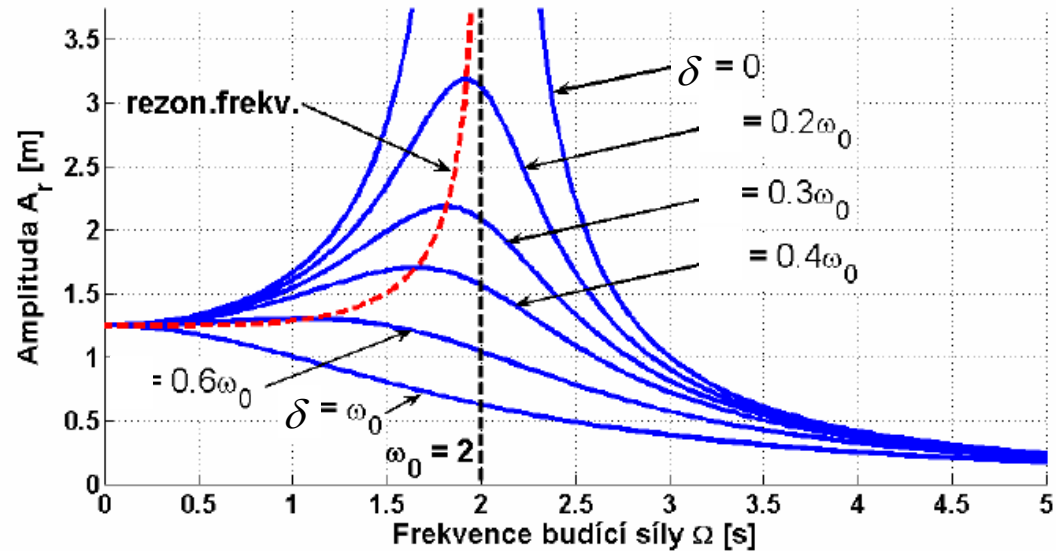
$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Omega \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi \doteq 0 \quad (\text{kmity ve fázi})$$

$$\Omega \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi \doteq -\pi \quad (\text{kmity v protifázi})$$

$$\Omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

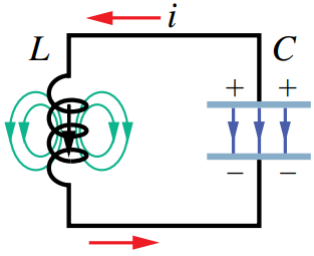
Kmity př.kola motocyklu/ bicyklu



Nucené kmity (náboje, proudu, napětí) vždy převezmou po celkem krátké době budící úhlovou frekvenci Ω , ať už byla vlastní úhlová frekvence ω jakákoli.

Harmonické kmity – oscilační RLC obvod

LC obvod



Tabulka 33.1 Energie prvků kmitajících soustav

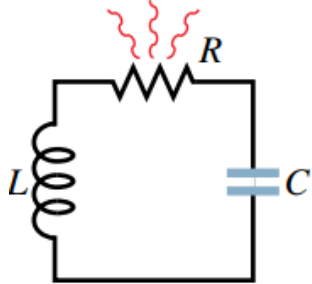
TĚLESO + PRUŽINA		CÍVKA + KONDENZÁTOR	
PRVEK	ENERGIE	PRVEK	ENERGIE
pružina	$E_p = \frac{1}{2}kx^2$	kondenzátor	$E_{el} = \frac{1}{2}(1/C)q^2$
těleso	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	cívka	$E_{mg} = \frac{1}{2}Li^2$
$v = dx/dt$		$i = dq/dt$	

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$L\ddot{q} + q/C = 0$$

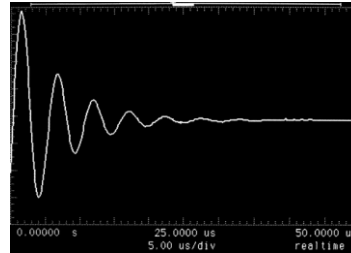
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Sériový RLC obvod

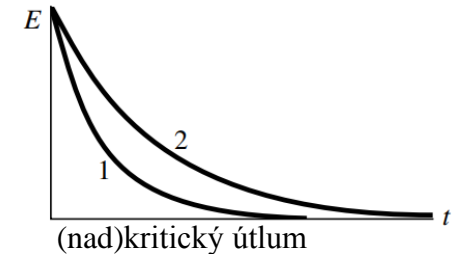


$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

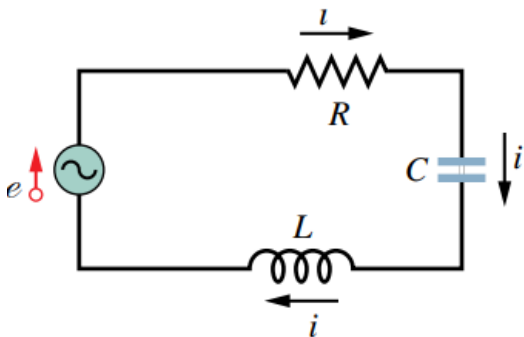
$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - (R/2L)^2}$$



tlumené oscilace



Nucené kmity sériového RLC obvodu

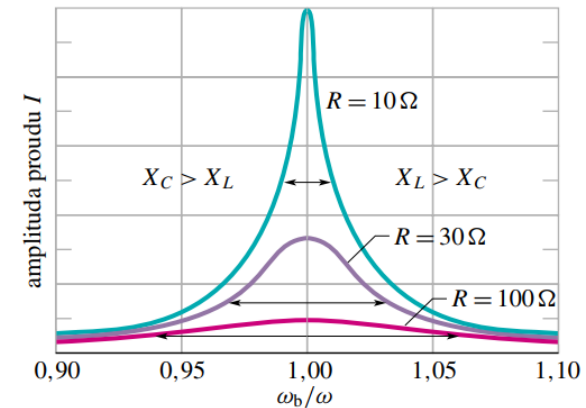


$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dE^{emn}}{dt}$$

$$I_0 = \frac{E_0^{emn}}{Z}, \quad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L}, \quad Q \dots \text{činitel jakosti obvodu}$$

„viz anténa“



13.13 Rezonanční křivky buzeného obvodu RLC

Harmonické kmity - vynucené

Všechny soustavy v přírodě a mechanické systémy vykazují 1 nebo více vlastních frekvencí
 → rezonance (v závislosti na útlumu)

Př.: rotující zařízení (motory, turbíny ..., vyvažování kol), mosty, křídla letadel, kola aut, stožáry, stromy, hudební nástroje, reproduktory, sluchové ústrojí, atomy v krystalové mříži, elektrony ve slupkách atomů; magnetické rezonance: FMR, EPR (spin e., 9GHz), NMR (MRI – ^1H , 42.58MHz)

V ustáleném stavu – dodávaný výkon roven výkonu disipativních sil

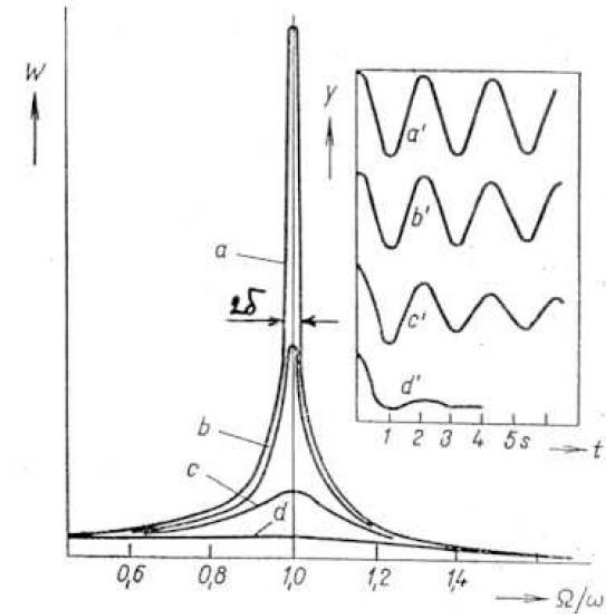
Velký činitel jakosti Q – malé síly vedou k vysokým výchylkám (úzká res.čára), př.:

El.obvody RLC	1 – 1000
Země, vlny při zemětřesení	200 – 1400
Struna piano	1000
Mikrovlnný (dutinový) rezonátor	10^4
Mikrovlnka (22 → 2,45GHz)	
Excitovaný atom	10^7
Excitované jádro Fe^{57}	$3 \cdot 10^{12}$

Př. Hřídel: průhyb x , vzdálenost těžiště od osy b , otáčky ω
 odhad řešení: $F_{\text{od}} = m \omega^2 (b + x)$, $F_{\text{elast}} = k \cdot x$, tedy:

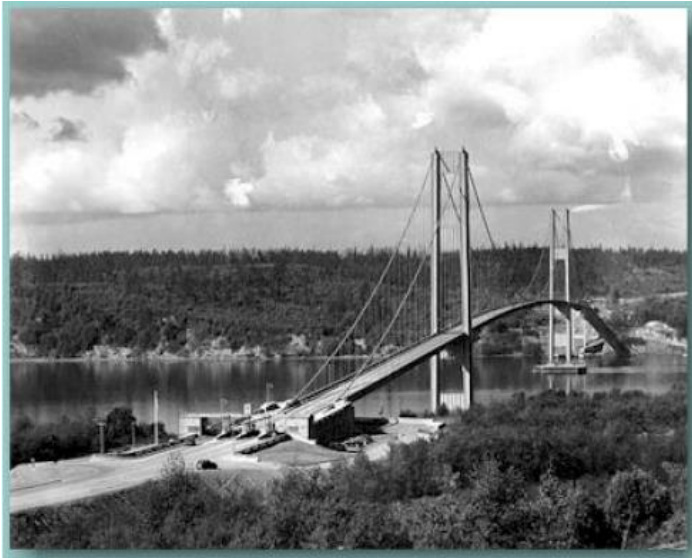
$$x = \frac{b}{\frac{k}{\omega^2 m} - 1} = \frac{b}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1} \quad (\text{neuvažujeme tlumení})$$

Nakreslete graf, diskutujte průhyb hřídele v závislosti na otáčkách ω !



Obr. (3.1) 21. Křivky rezonance rychlosti při různém útlumu

Harmonické kmity - vynucené



Rezonance

http://phet.colorado.edu/sims/resonance/resonance_en.html

<http://archive.org/details/SF121>

<http://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs>

<http://imechanica.org/node/8280>



Stalo se to v roce 1989, v době, kdy se v okolí San Franciska připravovalo zahájení třetí části Světových her. Oblast byla zasažena seizmickými vlnami ze 100 km vzdáleného ohniska zemětřesení poblíž Loma Prieta. Zemětřesení o síle 7,1 stupňů způsobilo rozsáhlé škody a zabilo 67 lidí. Na fotografii vidíme část 1,4 km dlouhého úseku Nimitzovy dálnice, kde došlo k desítkám smrtelných zranění, když se horní betonová deska zřítla na spodní a zasáhla motoristy. Příčinou zřícení byly nepochybně prudké otřesy, vyvolané seizmickými vlnami. Avšak proč byl právě tento úsek tak vážně poškozen, jestliže ostatní úseky dálnice s téměř totožnou konstrukcí zřícení unikly?

Parametrická rezonance

Soustava se udržuje v kmitání tím, že se periodicky mění vhodný *vnitřní parametr*

Zvýšení amplitudy → rezonance změnou vnitřních parametrů soustavy

Př. Rozhoupání houpačky vlastní silou

Pozn.: lze zesílit existující kmity (tedy nikoli z klidu)

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2(1 + \varepsilon f(t))x = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

$$\text{např: } f(t) = -\sin 2\omega_0 t$$

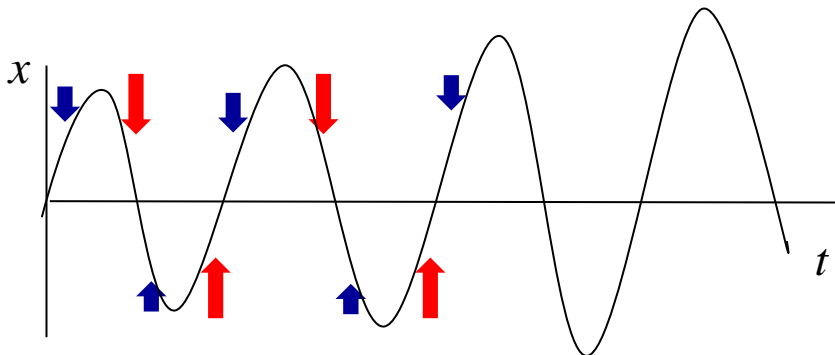
$$\text{nebo } f(t) = -1 \quad \text{pro } t \in \langle 0, T/4 \rangle \cup \langle T/2, 3T/4 \rangle$$

$$= +1 \quad t \in \langle T/4, T/2 \rangle \cup \langle 3T/4, T \rangle$$

$$\text{pozn. řešení ve tvaru: } x = e^{\beta t} \sin \omega_0 t$$

$$\text{rez. frekvence: } \Omega_p = 2\omega_0$$

$$\text{př. kyvadlo – vratná síla: } \sim k = m\omega^2 = \frac{m^2 g l}{J} \rightarrow \frac{mg}{l}$$



$$f(t) < 0$$

Princip superpozice – lineární systémy

Lin.systémy – př. oscilátor

$$\underbrace{\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\delta \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right)}_{\mathcal{L}(x)} x = \frac{F(t)}{m}$$

Př.: 2 oscilátory

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_v \frac{dx_1}{dt} + kx_1 = F_1(t)$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k_v \frac{dx_2}{dt} + kx_2 = F_2(t)$$

kde funkce $x_1(t)$ a $x_2(t)$ jsou řešeními pro vynucující síly $F_1(t)$ a $F_2(t)$. Sečteme-li obě rovnice

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x_1 + x_2) + k_v \frac{d}{dt} (x_1 + x_2) + k(x_1 + x_2) = F_1(t) + F_2(t) \quad (3.62)$$

Vidíme, že funkce $(x_1 + x_2)(t) = x(t)$ řeší rovnici pro sílu $F_1(t) + F_2(t) = F(t)$.

Rozklad (resp. superpozice) do jednotlivých složek

Princip superpozice – lineární systémy

Lin.systémy – př. oscilátor

$$\underbrace{\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\delta \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right)}_{\mathcal{L}(x)} x = \frac{F(t)}{m}$$

Lineární operátor: $\mathcal{L}(x+y) = \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y)$,
 $\mathcal{L}(ax) = a \mathcal{L}(x)$

a) rce $\mathcal{L}(x) = 0$

je-li x_1 řešením, pak ax_1 je rovněž řešením: $\mathcal{L}(ax_1) = a\mathcal{L}(x_1) = 0$

jsou-li x_1, x_2 řešením, pak $ax_1 + bx_2$ je rovněž řešením: $\mathcal{L}(ax_1 + bx_2) = a\mathcal{L}(x_1) + b\mathcal{L}(x_2) = 0$

b) rce $\mathcal{L}(x) = F(t)$

je-li x_p řešením, pak $x_1 + x_p$ je rovněž řešením: $\mathcal{L}(x_1 + x_p) = \mathcal{L}(x_1) + \mathcal{L}(x_p) = 0 + F(t) = F(t)$

př.: oscilátor

přechodové řešení

stacionární řešení

c) Superpozice řešení: popisuje-li $x_1(t)$ pohyb pro sílu $F_1(t)$, $x_2(t)$ pohyb pro sílu $F_2(t)$,
potom $x_1(t) + x_2(t)$ popisuje pohyb pro sílu $F_1(t) + F_2(t)$

př.: intenzita gravitačního pole: $\vec{E} = \sum \vec{E}_k$

Princip superpozice – skládání kmitů

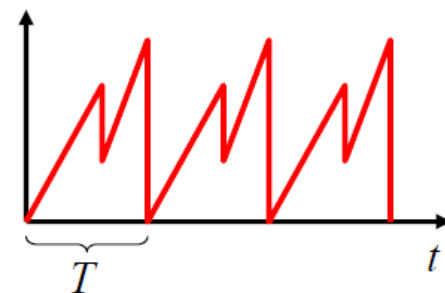
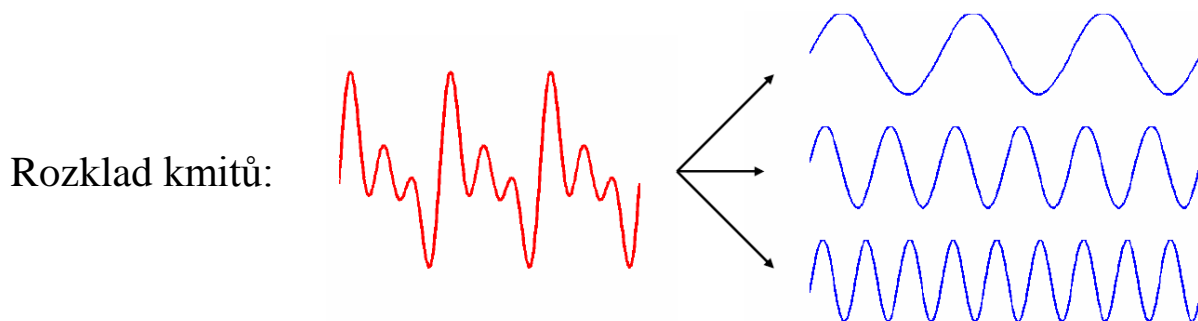
Princip superpozice – např. působí-li na h.b. více sil, výsledný pohyb odpovídá superpozici pohybů (např. kmitů) vyvolaných jednotlivými silami

Každý sebesložitější pohyb lineární soustavy lze vyjádřit jako superpozici čistě harmonických pohybů

Obecný pohyb je pak určen udáním amplitudy a fáze všech těchto pohybů

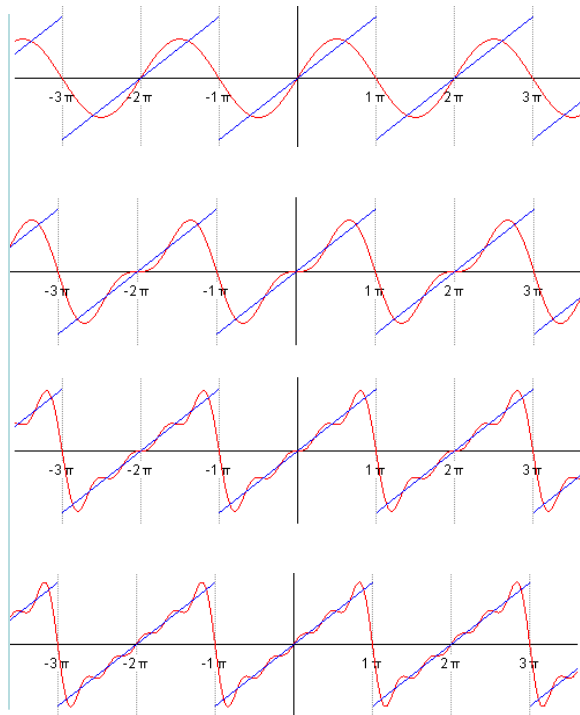
Každá kmitající lin.soustava je ekvivalentní souboru harmonických oscilátorů, jejichž frekvence odpovídají frekvenčním módům soustavy

Ot.: jak budeme řešit pro neharmonickou periodickou sílu?



Harmonická (Fourierova) analýza

Skládání kmitů

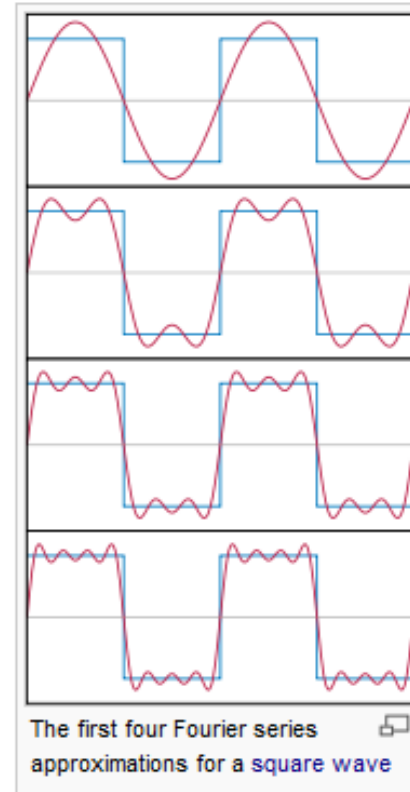


$\omega, +A$

$2\omega, -A/2$

$3\omega, +A/3$

$4\omega, -A/4$



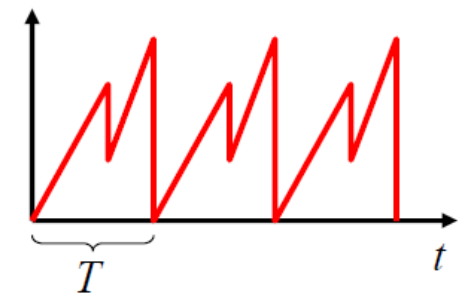
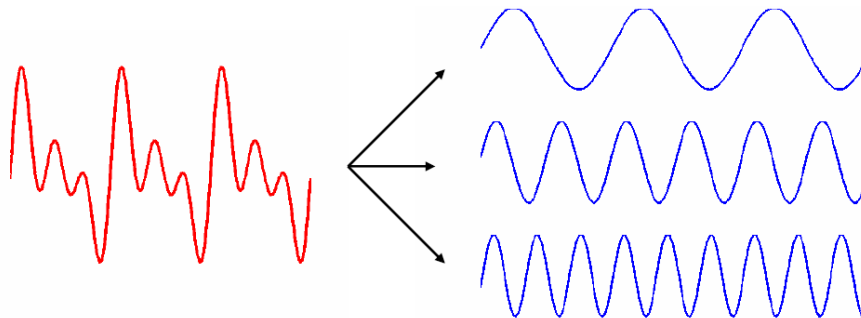
ω, A

$3\omega, A/3$

$5\omega, A/5$

$7\omega, A/7$

Rozklad kmitů:



Harmonická analýza - Fourierova transformace

- každý periodický pohyb se obecně dá rozložit na jednotlivé harmonické pohyby s frekvencemi $f, 2f, 3f, \dots$, kde frekvence f se nazývá **1.harmonická** a její násobky tzv. **vyšší harmonické**.
- rozklad je možno provést pomocí **Fourierovy transformace**

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi)$$

Koeficienty rozvoje:

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt$$

Kpx vyjádření:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t}$$
$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{ik\omega t} dt$$

kde

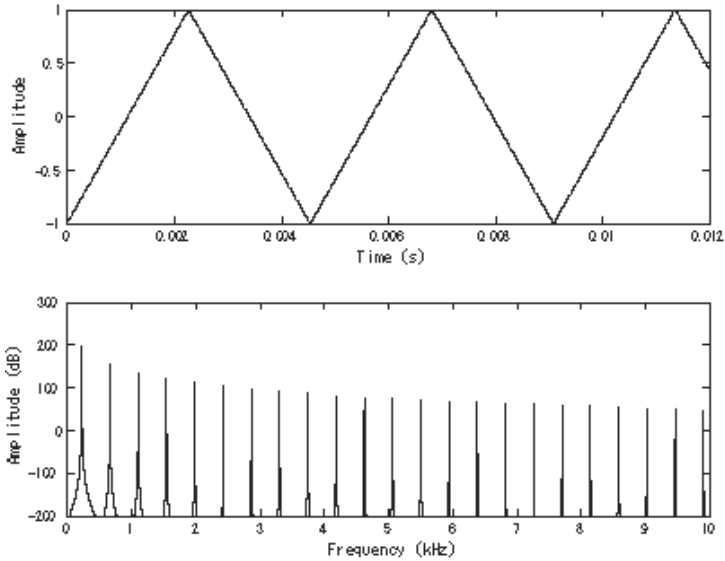
$$C_k = (A_k - iB_k)/2 \quad \text{pro } k > 0$$
$$= (A_k + iB_k)/2 \quad \text{pro } k < 0$$

Podmínka – kvadraticky integrabilní fce:

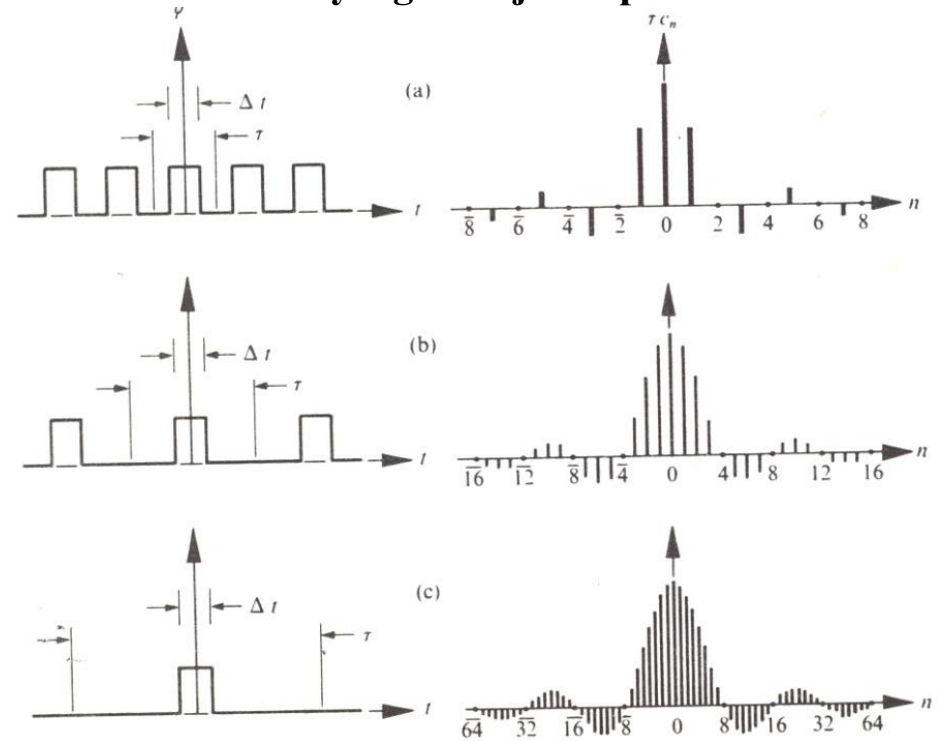
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

Harmonická (Fourierova) analýza

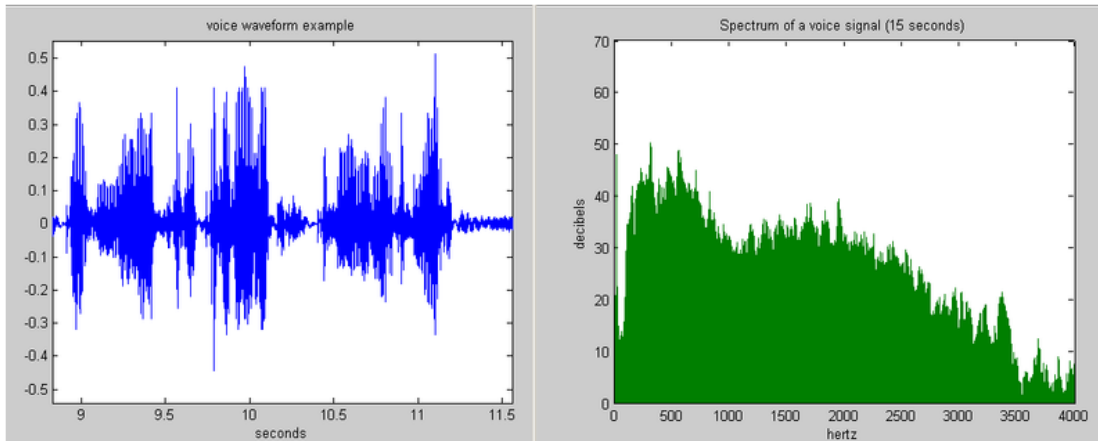
Frekvenční spektrum - čárové



Periodický signál a jeho spektrum



Frekvenční spektrum spojité - neperiodické fce

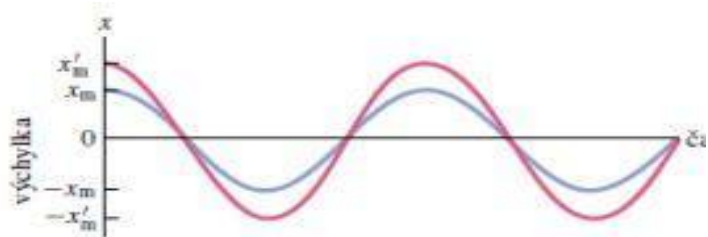


Example of voice waveform and its frequency spectrum

Harmonické kmity

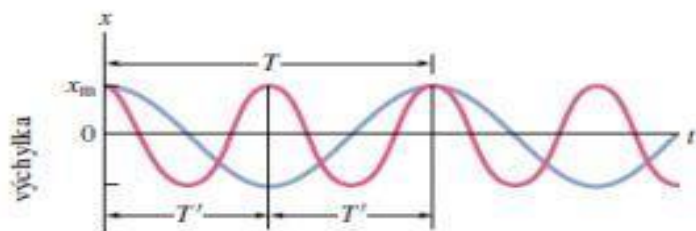
Lineárnost systému + harmonická analýza \Rightarrow důsledek:
každý (periodický) pohyb lze rozložit na elementární harmonické pohyby, jejich složením dostaneme výsledný pohyb (*princip superpozice*)

Skládání kmitů



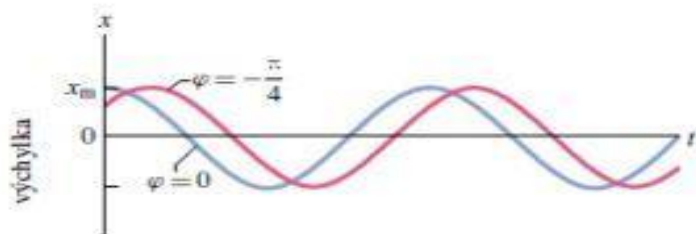
(a)

různé amplitudy



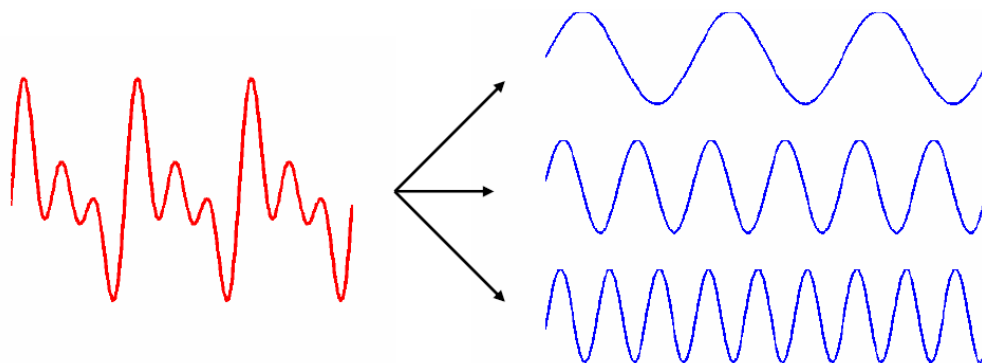
(b)

různé periody (frekvence)



různé počáteční fáze

Rozklad kmitů:



Skládání kmitů

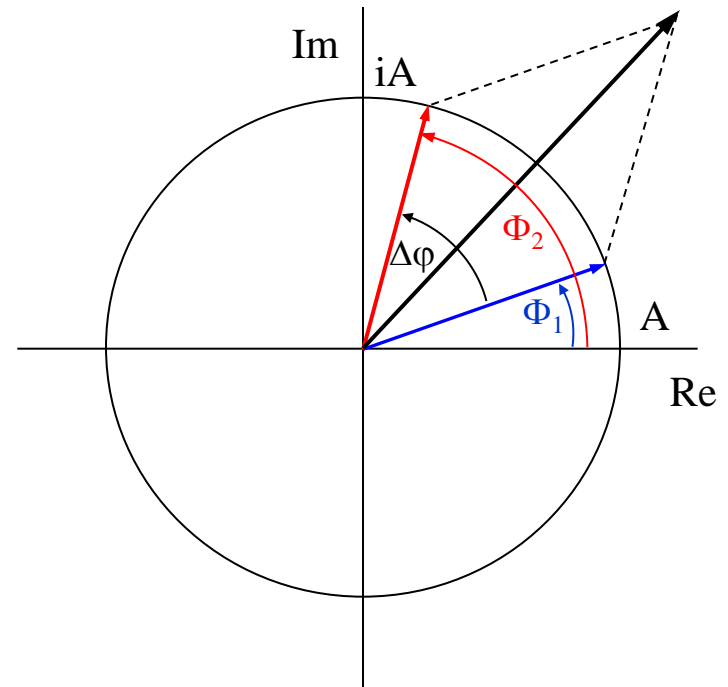
Zobrazení v kpx rovině (pomocí fázorů)

$$\hat{x}_1 = A_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)}$$

... časový vektor – **fázor** ... rotace v kpx rovině s úhlovou frekvencí ω

$$\hat{x}_2 = A_2 e^{i(\omega_2 t + \varphi_2)}$$

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \omega_1 t + \varphi_1 \\ \Phi_2 &= \omega_2 t + \varphi_2 \\ \Delta\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1\end{aligned}$$



Skládání kmitů

1a) Stejného směru - stejné frekvence

$$u_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad u_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

- výsledný pohyb je periodický se stejnou frekvencí $u = A \sin(\omega t + \varphi)$

$$u = u_1 + u_2 = \sin \omega t (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) + \cos \omega t (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)$$

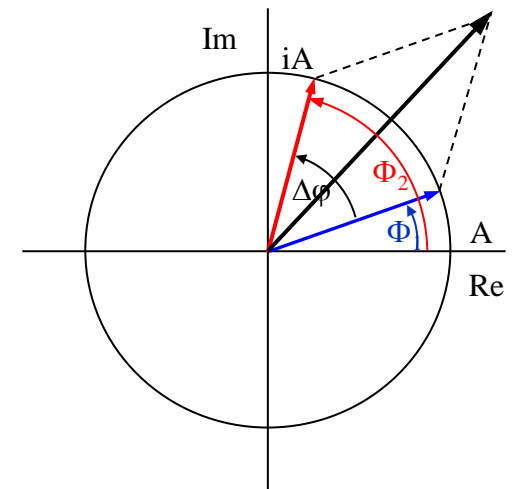
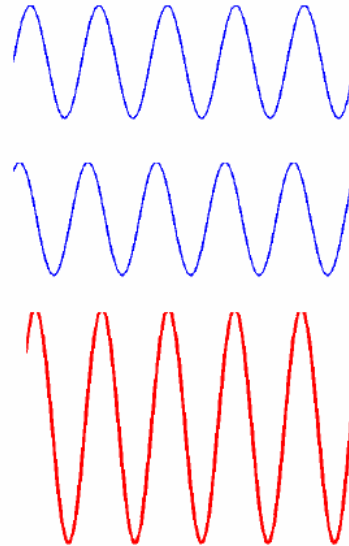


Amplituda:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Fázové posunutí:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$



Skládání kmitů

1b) Stejného směru - různé frekvence

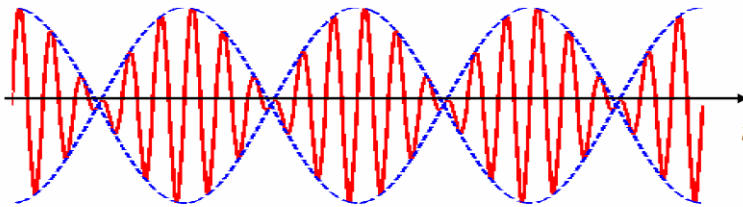
$$u = u_1 + u_2 = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A \sin(\omega_2 t + \varphi_2) =$$
$$= 2A \cos\left(\underbrace{\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)}_{\text{pomalou proměnná amplituda } A(t)}\right) \sin\left(\underbrace{\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)}_{\text{harmonický kmitavý pohyb}}\right)$$

Pro $\omega_1 \approx \omega_2$:

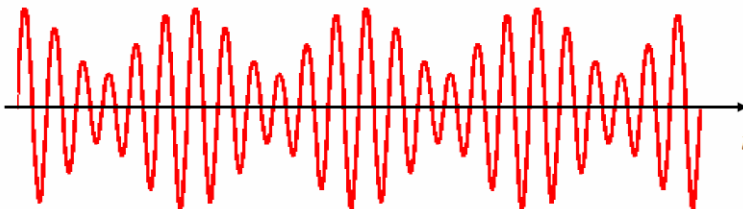
pomalou proměnná
amplituda $A(t)$

harmonický kmitavý
pohyb

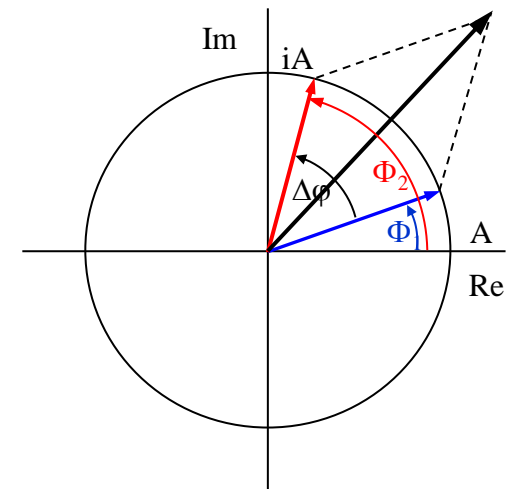
- pokud: $A = A_1 = A_2$



- pokud: $A_1 \neq A_2$



\Rightarrow rázy



Skládání kmitů

2) Různého směru – 2 na sebe kolmé směry

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t) \quad y = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0)$$

Trajektorie kmitů pro $\omega_1 = \omega_2$:
$$y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_0) = A_2 \sin \omega t \cos \varphi_0 + A_2 \cos \omega t \sin \varphi_0 =$$
$$= \frac{A_2}{A_1} x \cos \varphi_0 + A_2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \varphi_0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{A_1^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos^2 \varphi_0 + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2 \varphi_0$$

rovnice elipsy

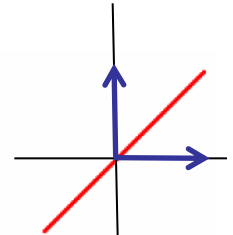
Pro $\varphi_0 = 0, \pi \Rightarrow \underline{(x/A_1 \pm y/A_2) = 0}$... přímka, **lineární kmity**

Pro $\varphi_0 = \pi/2 \Rightarrow \underline{(x^2/A_1^2 + y^2/A_2^2) = 1}$... **elipsa v hlavních osách**

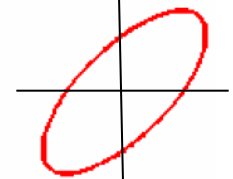
pokud $A_1 = A_2$ kružnice, pravotočivý pohyb, pro $\varphi_0 = 3\pi/2$
levotočivý pohyb po kružnici, **kruhové kmity**

Obecně **eliptické kmity** \rightarrow rozklad do vlastních módů

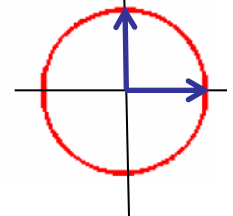
$\varphi = 0^\circ$

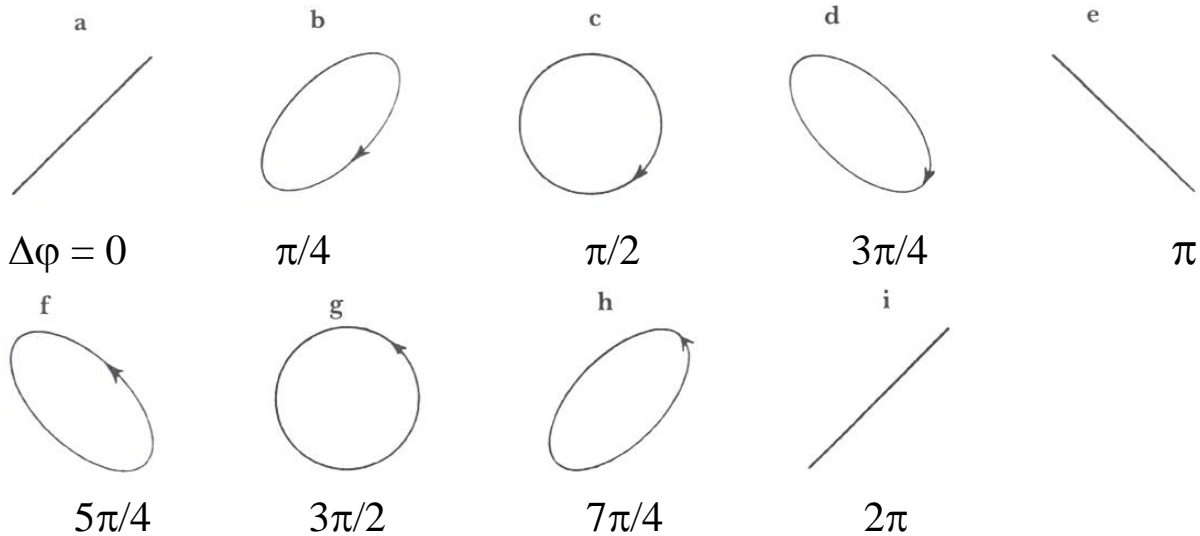


$\varphi = 45^\circ$

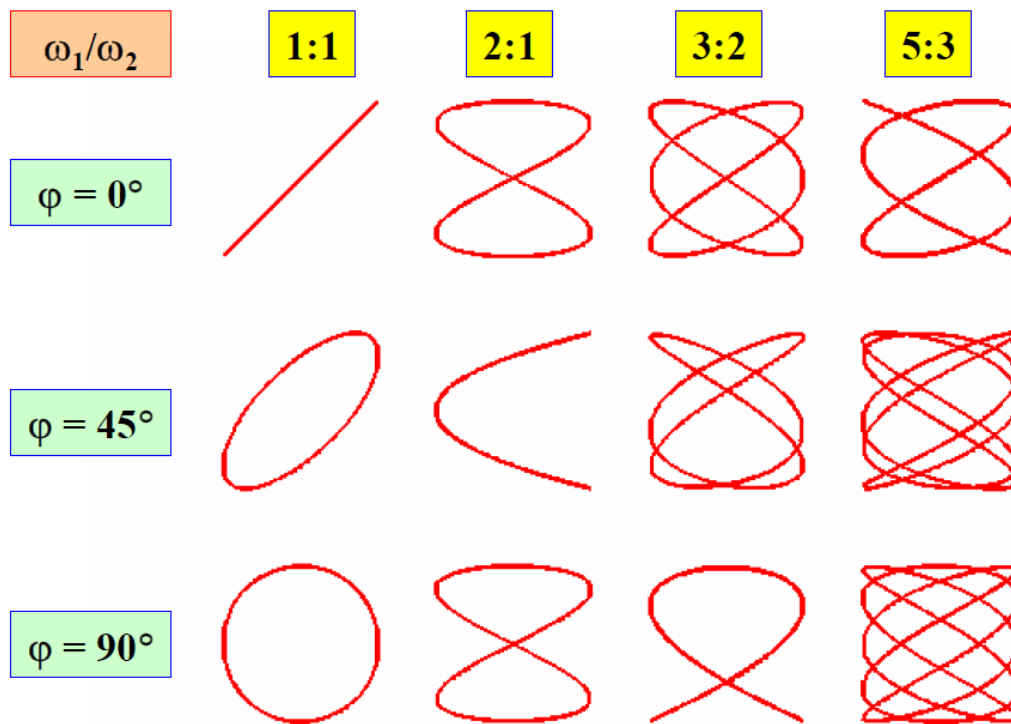


$\varphi = 90^\circ$





Lissajousovy obrazce: $\omega_1 \neq \omega_2$ $\omega_1 / \omega_2 = n_2 / n_1$



Lissajousovy obrazce:
frekvence v poměru celých čísel

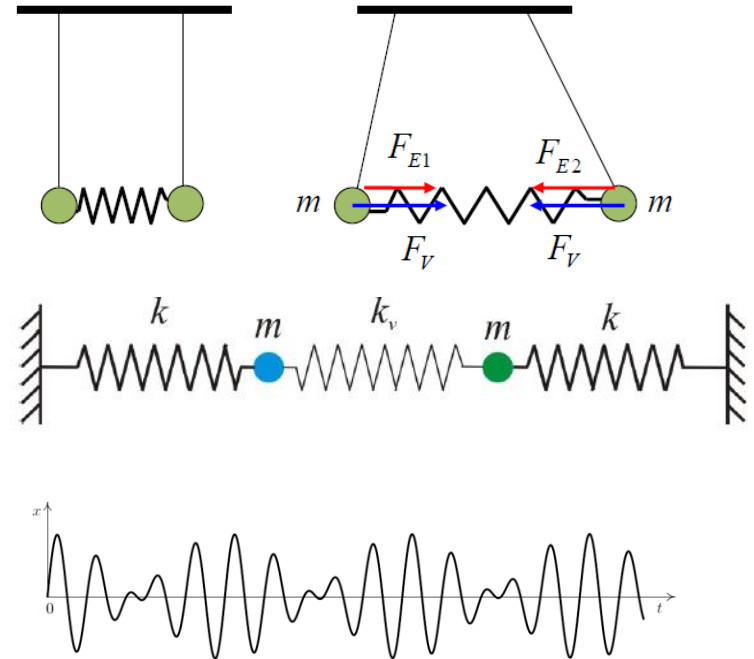
Skládání kmitů

3) **Vázané oscilátory** – mezi 2 oscilátory působí elastická vazba k_v

$$F_v = \pm k_v(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k_v(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_v(x_2 - x_1)$$



Separace proměnných: rce sečteme/odečteme,

ozn. $x = x_1 + x_2$, $\xi = x_2 - x_1$, potom:

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\Rightarrow \ddot{\xi} + \left(\frac{k+2k_v}{m}\right)\xi = 0, \quad \frac{k+2k_v}{m} = \omega^2$$

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Výsledné kmity:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\xi \Rightarrow x_1(t) = \frac{1}{2}(x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \xi_0 \cos(\omega t + \varphi))$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\xi \Rightarrow x_2(t) = \frac{1}{2}(x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \xi_0 \cos(\omega t + \varphi))$$

Speciální případ - rázy: (viz skládání kmitů blízkých frekvencí)

Je-li vazba slabá tj. $k_v \ll k$ jsou frekvence ω_0 a ω blízké \Rightarrow periodické zesilování a zeslabování výsledných kmitů viz graf níže

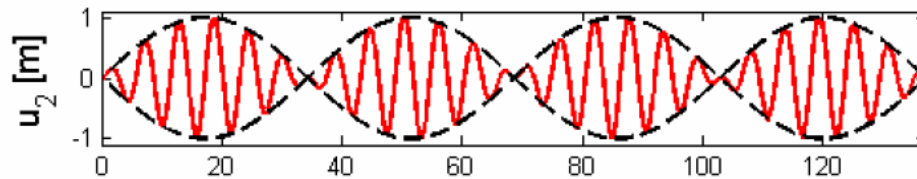
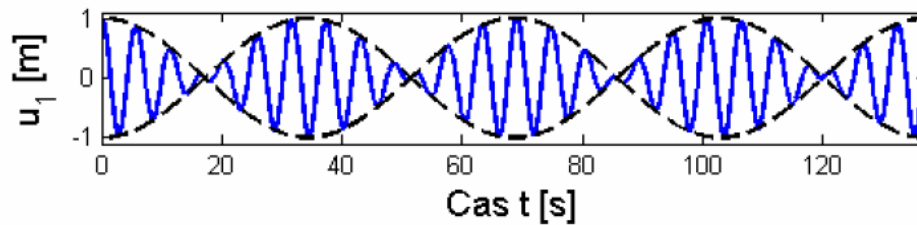
Př.: určete $x_1(t)$, $x_2(t)$ pro poč.podm.: pro $t=0$: $x_1=A$, $x_2=v_1=v_2=0$ (tj. $\Delta\varphi=\pi/2$)

Skládání kmitů

Přelévání energie mezi spřaženými oscilátory

u spřažených oscilátorů
vlivem vazby dochází k
rázům

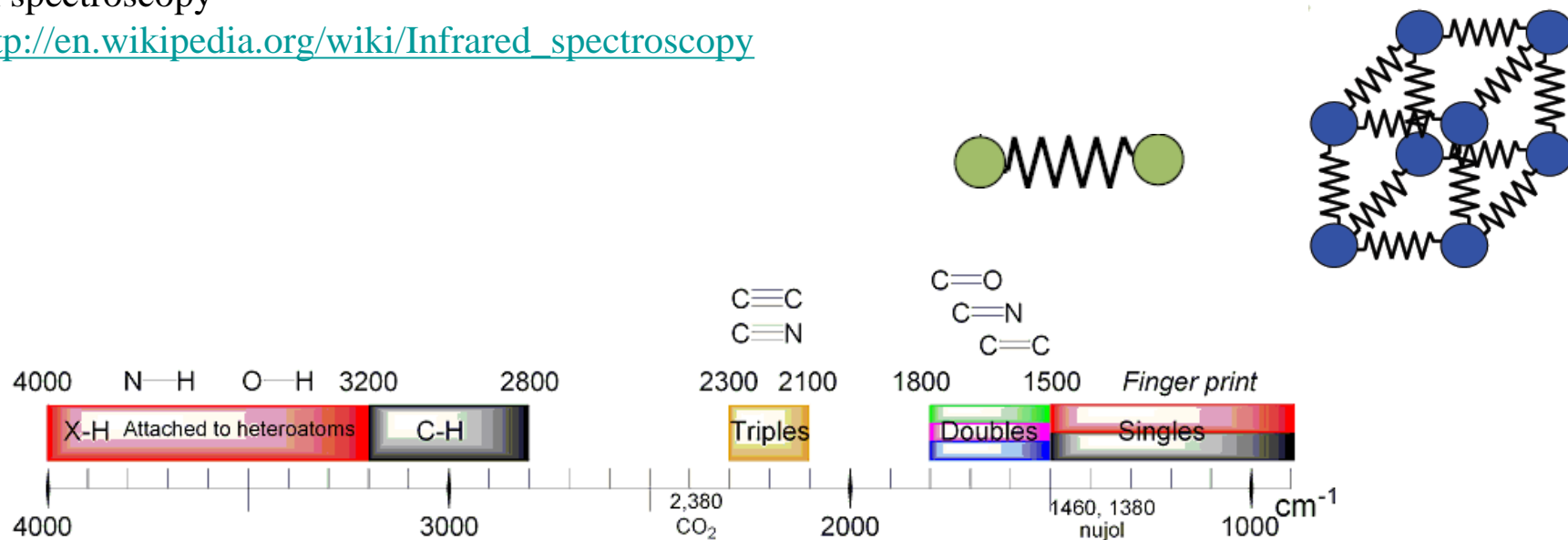
Čím těsnější je vazba mezi
oscilátory, tím rychleji se přenáší
mezi nimi mechanická energie



Kmity mříže

IR spectroscopy

http://en.wikipedia.org/wiki/Infrared_spectroscopy



Near IR absorption spectrum of dichloromethane showing complicated overlapping overtones of mid IR absorption features.

