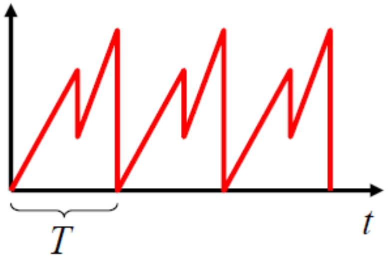
6. Kmity a vlnění

Anotace:

Kmity tlumené, vynucené, skládání kmitů, vázané kmity, aperiodický tlumený pohyb, rezonance. Pojem vlny, vlnová rovnice, rovinná vlna. Energie a intenzita vlny. Harmonická vlna, způsoby popisu, vztah vlnová délka-rychlost-frekvence. Fázová rychlost a grupová rychlost. Typy vlnění, polarizace. Princip superpozice, interference vlnění, stojaté vlnění. Huygensův princip, lom, odraz. Dopplerův jev.

Kmity - částice (resp. soustava částic, obecně fyzikální veličina) kmitá (tj. osciluje) <u>kolem rovnovážné polohy</u> – koná harmonický pohyb:
harmonický oscilátor

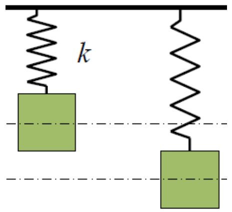


Periodický průběh veličiny sledované veličiny: $Y = Y(t + T)$

Perioda T, frekvence f, kruhová frekvence $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

Chování v okolí bodu stabilní rovnováhy

Např.: kyvadlo, závaží na pružině



Harmonický oscilátor

Harmonický (lineární) oscilátor

Částice pohybující se v potenciálu:

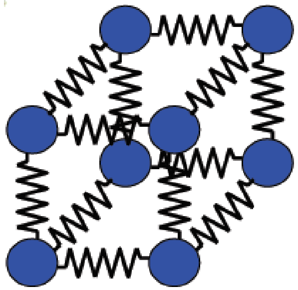
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2, \quad k > 0 \quad \text{(vazba)}$$

$$F_i = -\frac{\partial E_p}{\partial x_i} = -kx \quad \text{vratná síla}$$

Harmonické oscilace kolem $x = 0$, s úhlovou frekvencí $\omega^2 = k/m$

Řadu systémů lze popsat (alespoň přibližně) rovnicemi harmonického oscilátoru, např.:

- Vibrace atomů v molekule
- Kmity atomů nebo iontů v krystalu
- Elektromagnetické kmity v dutině
- Plazmové kmity
- Oscilace LC obvodu
- Kmity mechanických soustav



Harmonické kmity - netlumené

Pohybová rovnice: $\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$ (homogenní diferenciální rce 2. řádu)

Hledejme řešení: $x = Ce^{\alpha t}$ $\Rightarrow$ charakteristická rce: $\alpha^2 + \frac{k}{m} = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$

Obecné řešení: $\boxed{x = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}}$ (lin.kombinace 2 nezávislých řešení)

$$= (C_1 + C_2)\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + i(C_1 - C_2)\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$ (Euler: $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$)

x musí být reálné (C_1, C_2 – kpx, tj. 4 parametry), musí být $C_1 = C_2^*$ kpx sdružené

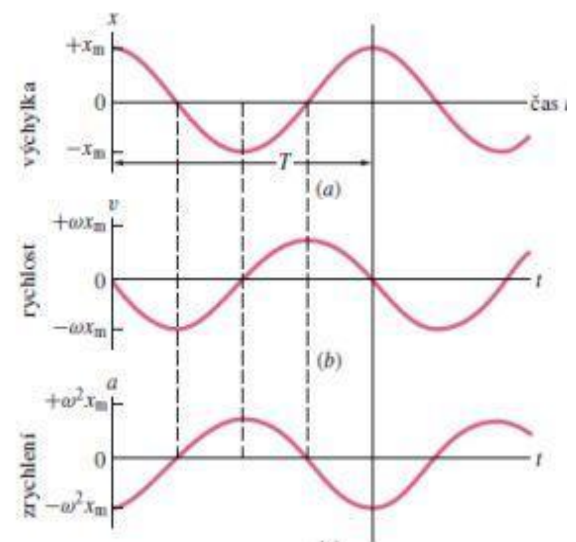
Označme:
$$C_1 + C_2 = A\sin\varphi$$
$$i(C_1 - C_2) = A\cos\varphi$$

Potom výchylka: $\boxed{x = A\sin(\omega t + \varphi), \quad \text{kde } \omega = \sqrt{k/m}}$

Rychlost $v = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$ amplituda: $v_0 = A\omega$

Zrychlení $a = \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$ $a_0 = - A\omega^2$

Pozn. Harmonický pohyb je jediný, který vzniká pod vlivem vratné síly
$\omega = \sqrt{k/m}$ - **vlastní frekvence**



Harmonické kmity – formy matematického popisu

$$x(t) = A\cos\underbrace{\left(\omega t + \varphi\right)}_{\text{fáze}}$$

$$x(t) = B_S \sin\omega t + B_C \cos\omega t \qquad \text{kde } B_S = -A\sin\varphi, \quad B_C = A\cos\varphi$$

$$x(t) = Ce^{i\omega t} + C^* e^{-i\omega t} \qquad \text{kde } C = \left(A/2\right)e^{i\varphi} \qquad \text{tedy } \operatorname{Re} C = B_C/2 = \left(A/2\right)\cos\varphi$$

$$\operatorname{Im} C = B_S/2 = \left(A/2\right)\sin\varphi$$

$$x(t) = \operatorname{Re}\left(De^{i\omega t}\right) \qquad \text{kde } D = Ae^{i\varphi} = 2C \text{ ... kpx}$$

$$= \operatorname{Re}\left(Ae^{i(\omega t+\varphi)}\right) \qquad A\text{...real}$$

V praxi píšeme:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= De^{i\omega t} \\ &= De^{-i\omega t} \end{aligned}}$$

… pouze reálná část má fyzikální smysl, D … kpx.

Eulerův vzorec: $e^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i\sin\omega t$

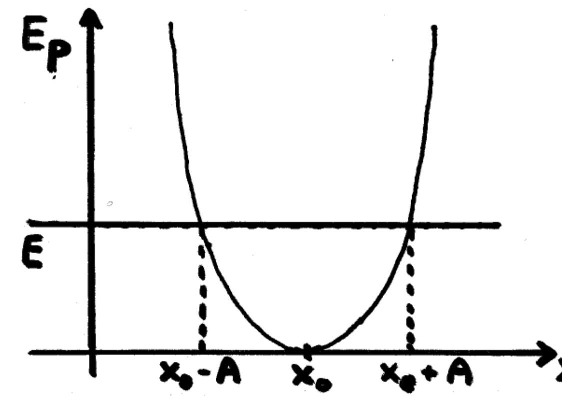
Harmonické kmity - netlumené

Kinetická energie: $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha)$, hybnost částice $p = m\dot{x}$

Potenciální en.: $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \alpha)$ $\left(= -W = \int_{x_0}^{x} k(x - x_0)\,dx \right)$

(závislot E_p je parabolická)

Celková energie: $\boxed{E_c = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2}$ nezávisí na čase, (konz. síly)



ω - vlastní frekvence

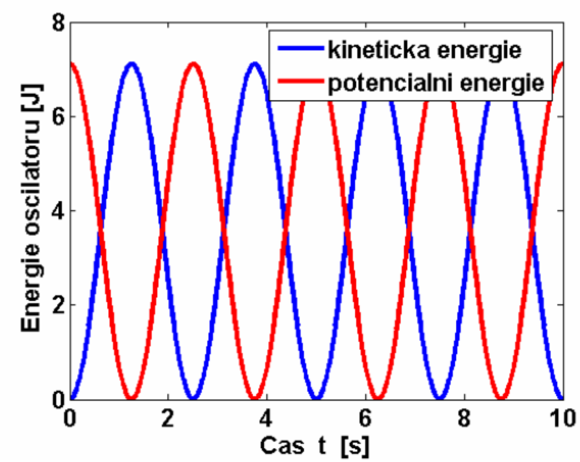
T - perioda

Úloha – vypočtěte:

a) rychlost částice v bodě x $\left(v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \right)$

b) - hustotu pravděpodobnosti výskytu částice, $w(x)$
   - pravděpodobnost výskytu částice v intervalu $\Delta x=(a,b)$

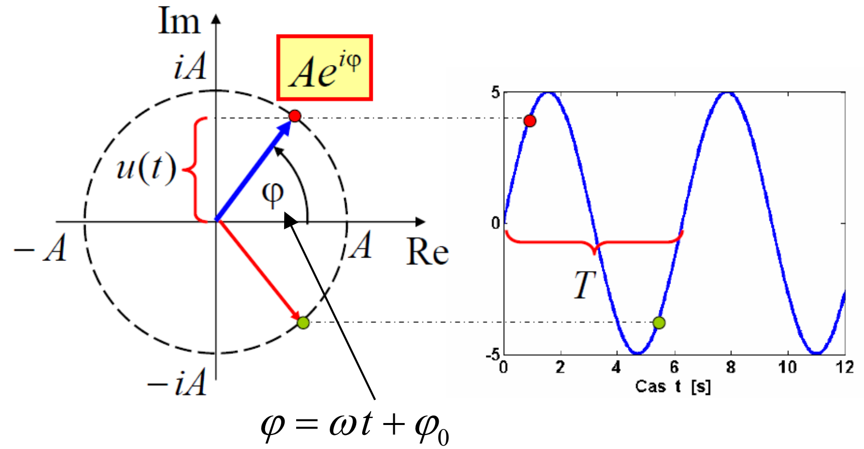
$$\left(w(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}, \quad P_{a,b} = \int_a^b w(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\arcsin\frac{x}{A} \right]_a^b \right)$$



Harmonické kmity – komplexní vyjádření

$$x = A\cos\big(\overbrace{\omega t + \varphi_0}^{\varphi\ \dots\ \text{fáze}}\big)$$

$$\hat{x} = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)}$$ časový vektor (fázor)



Zobrazení v kpx rovině –
fázor rotuje s úhlovou frekvencí ω

$$z = x + iy = Ae^{i\varphi} = A(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

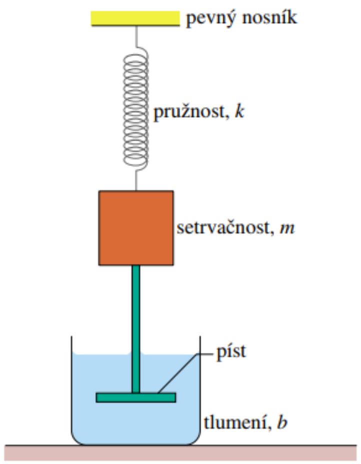
Harmonické kmity - tlumené

Vliv tření (tlumení) – odhad výsledku:
Amplituda: $p^n A,$ $p \in \langle 0,1 \rangle$, tedy $n \sim t$ (času)

Očekávaný výsledek: $p^{kt} A = e^{\ln p . kt} A = e^{-\alpha t} A$, kde $\alpha = -k . \ln p > 0$
$\Rightarrow$ amplituda tedy exponenciálně klesá

Př:
mechanické tlumiče (auto, mechanické váhy,….téměř lib.mechanická konstrukce vystavená dynamickým silám)
elektrické obvody

Model:



Harmonické kmity - tlumené

Tlumící síla: $F_{ox} = -bv = -b\dot{x}$

$$b = konst., b > 0$$

2.N.Z.: $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

označení: $\frac{k}{m} = \omega_0^2 \;\; ; \;\; \frac{b}{m} = 2\delta \;\; ; \;\; \delta \ldots$ součinitel tlumení

$\omega_0 \ldots$ vlastní frekvence

(15) $$\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

- (15) je lineární diferenciální rovnice, řešení hledáme ve tvaru $x(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha = konst.$
- dosazením $x(t)$ do (15) získáme charakterickou rovnici:

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0 \qquad \alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0{}^2}$$

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\omega \; ; \; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \; ; \; \omega \ldots \text{úhlová frekvence } (\omega < \omega_0)$$

Harmonické kmity - tlumené

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - {\omega_0}^2}$$

a) nadkritický útlum (silné tlumení)

$\delta > \omega_0$: *aperiodický pohyb(velké tlumení)*

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \qquad < 0, \text{ reálné}$$

– 2 lineárně nezávislá řešení: $x_1(t) = e^{\alpha_1 t}$, $x_2(t) = e^{\alpha_2 t}$

– obecné řešení je jejich lineární kombinací:

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}}$$

$\alpha < 0$, tj. exponenciální útlum, žádné kmity

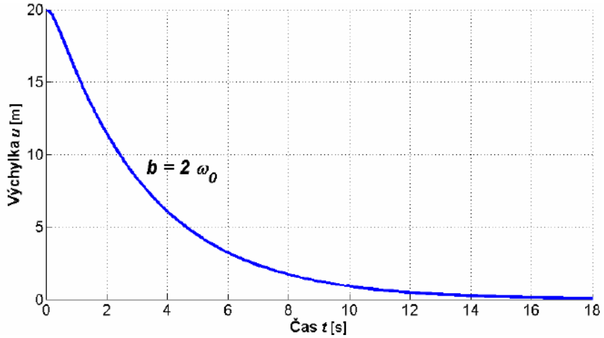
$C_1, C_2 = konst.$ (určeny počátečními podmínkami)

Rychlost kmitů: $v = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow v = \alpha_1 C_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 C_2 e^{\alpha_2 t}$

Př.: počáteční podmínky: $t = 0 \;\Rightarrow\; x = A_M,\; v = 0$

řeš.: $x = \frac{A_M}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(\alpha_1 e^{\alpha_2 t} - \alpha_2 e^{\alpha_1 t}\right)$

Pozn.: Po vychýlení se oscilátor vrací do rovnováhy,
(v konečném čase ji nedosáhne), nedochází ke kmitům



Harmonické kmity - tlumené

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^{\,2}}$$

b) kritický útlum $\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\omega\ ;\ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\ ;\ \omega \ldots$ úhlová frekvence $(\omega < \omega_0)$

$\delta = \omega_0$: *mezní aperiodický pohyb*

$$\alpha_{1,2} = -\delta \quad < 0$$

– 2 lineárně nezávislá řešení: $x_1(t) = e^{-\delta t}\ ,\ x_2(t) = te^{-\delta t}$

– obecné řešení je jejich lineární kombinací:

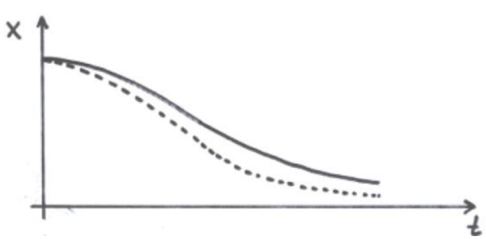
$$\boxed{x(t) = (A + Bt)e^{-\delta t}}$$

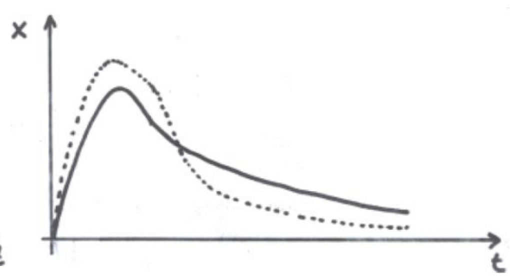
$A, B = konst.$ (určeny počátečními podmínkami)

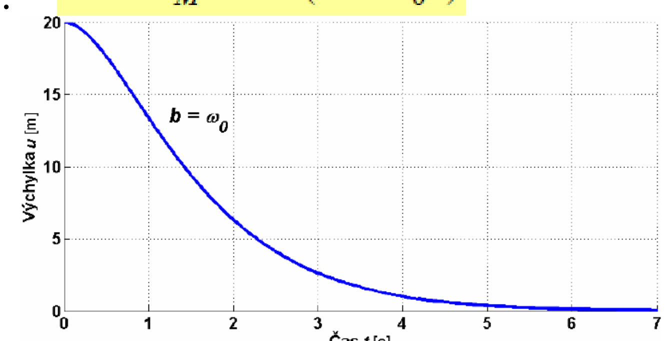
pozn. oscilátor projde nulou (rovnovážnou polohou) pro $t = -A/B$, a pro $t \to \infty$ konverguje k 0 rychleji, než v aperiodickém případě, nedochází ke kmitům

Rychlost: $$v = \frac{dx}{dt} = e^{-\omega_0 t}\left(B\left(1 - \omega_0 t\right) - \omega_0 A\right)$$

Př.: počáteční podmínky: $t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = A_M\,, \quad v = 0$ řeš: $x = A_M e^{-\omega_0 t}\left(1 + \omega_0 t\right)$







Harmonické kmity - tlumené

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^{\,2}}$$

c) Slabé tlumení

$\delta < \omega_0$: *tlumený harmonický kmit (malé tlumení)*

$\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\omega$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$; $\omega \ldots$ úhlová frekvence ($\omega < \omega_0$)   α komplexní

– 2 lineárně nezávislá řešení: $x_1(t) = e^{-\delta t + i\omega t}$, $x_2(t) = e^{-\delta t - i\omega t}$

– obecné řešení je jejich lineární kombinací:

$$x(t) = C_1 e^{-\delta t + i\omega t} + C_2 e^{-\delta t - i\omega t} = e^{-\delta t}(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t})$$

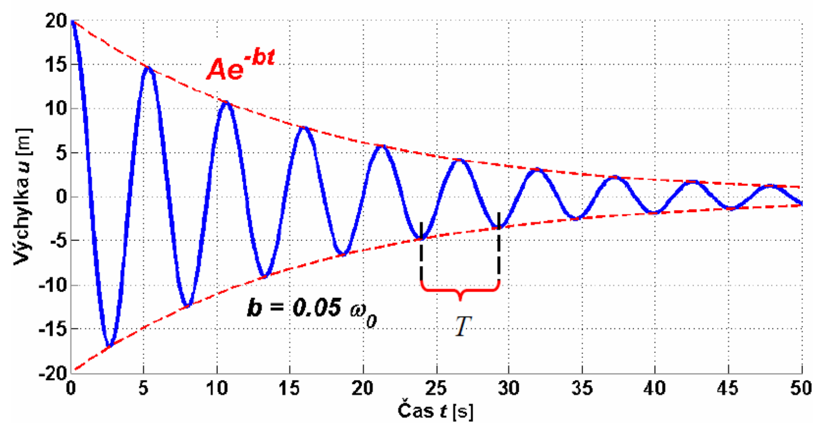
$\boxed{x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)}$ $C_1, C_2, A, \varphi_0 = konst.$ (určeny počátečními podmínkami)

pozn. Amplituda se exponenciálně zmenšuje, oscilátor projde nulou (rovn.polohou) mnohokrát

Rychlost kmitů: $v = -Ae^{-\delta t}\left(\omega \sin(\omega t + \varphi_0) + \delta \cos(\omega t + \varphi_0)\right)$

Perioda: $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$

Energie: $E_c = \dfrac{1}{2} m\omega^2 A^2 e^{-2\delta t}$



Harmonické kmity - tlumené

Charakteristiky tlumených oscilací: $\boxed{x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0)}$

- **útlum:**

-podíl dvou výchylek soustavy, lišících se o 1 periodu $\beta = \dfrac{x(t)}{x(t+T)} = \dfrac{Ae^{-\delta t}\cos(\ldots)}{Ae^{-\delta(t+T)}\cos(\ldots)} = e^{\delta T}$

- **logaritmický dekrement útlumu:** $\underline{\vartheta = \ln\beta = \delta T}$

- **činitel jakosti kmitající soustavy:**

- 2π násobek poměru energie oscilátoru $W(t)$ k úbytku energie soustavy za dobu 1 periody

$$W(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = 2\pi\frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} = \frac{2\pi}{1-e^{-2bT}}}$$

vyjadřuje kvalitu oscilátoru

Harmonické kmity - vynucené

Na oscilátor působí kromě vratné síly a tlumení ještě časově proměnná vnější budící síla:

$F = F_0 \cos\Omega t,$ $\quad\Omega$ úhlová frekvence budící síly

ω_0 vlastní úhlová frekvence volného oscilátoru

2.N.Z.: $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0\cos\Omega t$ označení: $\frac{k}{m} = \omega_0^2\ ;\ \frac{b}{m} = 2\delta\ ;\ \frac{F_0}{m} = S$

$$\underline{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = S\cos\Omega t}$$

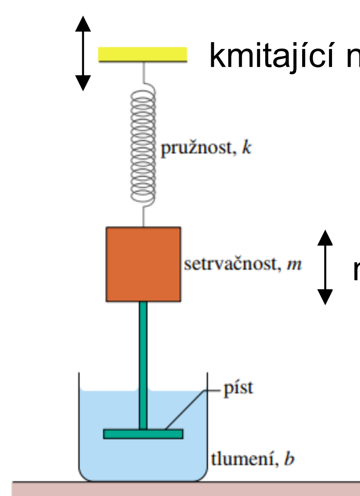
V komplexní symbolice: $$\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = Se^{i\Omega t}} \qquad (18)$$

Ot.: bude řešení stejné i v kpx symbolice? Jaké je řešení pro časově neproměnnou sílu?

Lin. dif. rce 2.řádu s pravou stranou:
obecné řešení = řešení homogenní rce (tj. bez pravé strany, to už známe) + jedno partikulární řešení úplné rce s pravou stranou

Hledáme tedy partikulární řešení
(následující strany)

kmitající nosník s frekvencí Ω



nebo period.síly působící na těleso

Harmonické kmity - vynucené

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = Se^{i\Omega t}$$, kde $S = F_0/m$, $\omega_0^2 = k/m$ je vlastní frekvence

Hledáme ***partikulární (stacionární)*** řešení ve tvaru $\underline{x_p = x_0 e^{i\Omega t}}$, tj. hledáme x_0. Dosazením:

$$x_0 e^{i\Omega t}\left(-\Omega^2 + i2\delta\Omega + \omega_0^2\right) = Se^{i\Omega t} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{x_0 = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\delta\Omega}}$$

… kpx amplitudu x_0 přepíšeme do tvaru:

$$x_0 = \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - i2\delta\Omega}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2} \overset{ozn.}{=} |x_0| e^{i\varphi},$$ tj. $\underline{x_p = |x_0| e^{i(\Omega t + \varphi)}}$ kde φ … fáze $\Rightarrow$

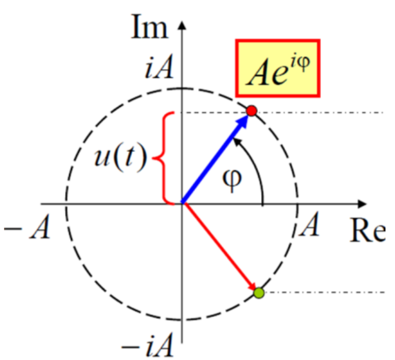
stacionární řešení

$$\boxed{\tan\varphi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}}$$

fázový posun výchylky vůči působícímu poli
(výchylka se zpožďuje za silou)

$$\boxed{|x_0| = \sqrt{x_0\bar{x}_0} = \frac{F_0/m}{\left(\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right)^{1/2}}}$$

amplituda ustálených kmitů



Euler: $z = x + iy = Ae^{i\varphi} = A(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Harmonické kmity - vynucené

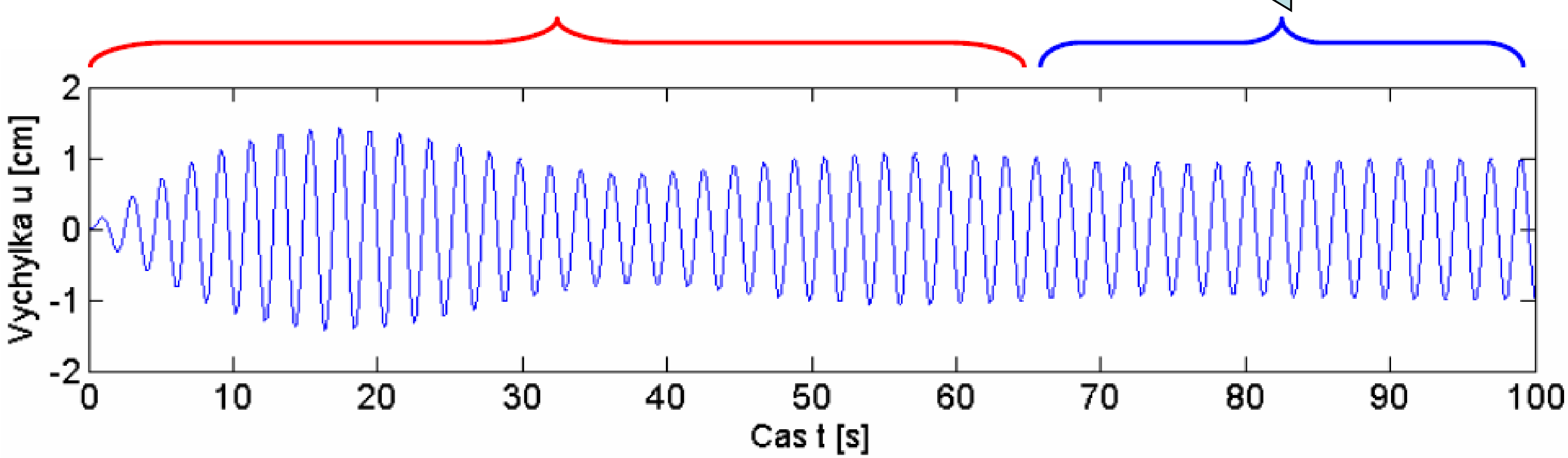
úplné řešení: $x(t) = \underbrace{C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}}_{\text{viz tlumený oscilátor}} + \underbrace{x_0 e^{i\Omega t}}_{x_p}$ $\qquad C_1, C_2, \alpha_{1,2} = konst.$

Real část: $\boxed{x(t) = A e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0) \quad + \quad |x_0|\cos(\Omega t + \varphi)}$

$$x(t) = \underbrace{A e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_0)}_{} \quad + \quad \underbrace{\frac{F_0/m}{\left(\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right)^{1/2}}\cos\left(\Omega t + \varphi\right)}_{} \quad \text{kde} \quad \varphi = \arctan\frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

přechodové řešení
exp.ubývá, zaniká s časem

stacionární řešení
ustálený stav



Harmonické kmity - vynucené

$$|x_0| = \frac{F_0/m}{\left(\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right)^{1/2}}$$

$$\tan\varphi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

Stacionární řešení, amplituda vynucených kmitů <u>závisí na frekvenci budicí síly Ω</u>:
$d|x_0|/d\Omega = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$ rezonanční frekvence

$$|x_0|_{\max} = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$ amplituda v rezonanci

pro slabé tlumení $\delta \ll \omega_0$: $\Omega_{res} \rightarrow \omega_0$
$|x_0|_{max} \rightarrow \infty$

Rezonance - jev, kdy při kmitání malá budící veličina způsobí velkou odezvu jiné veličiny (zde rezonance výchylky způsobená budící silou) -
rezonanční zesílení

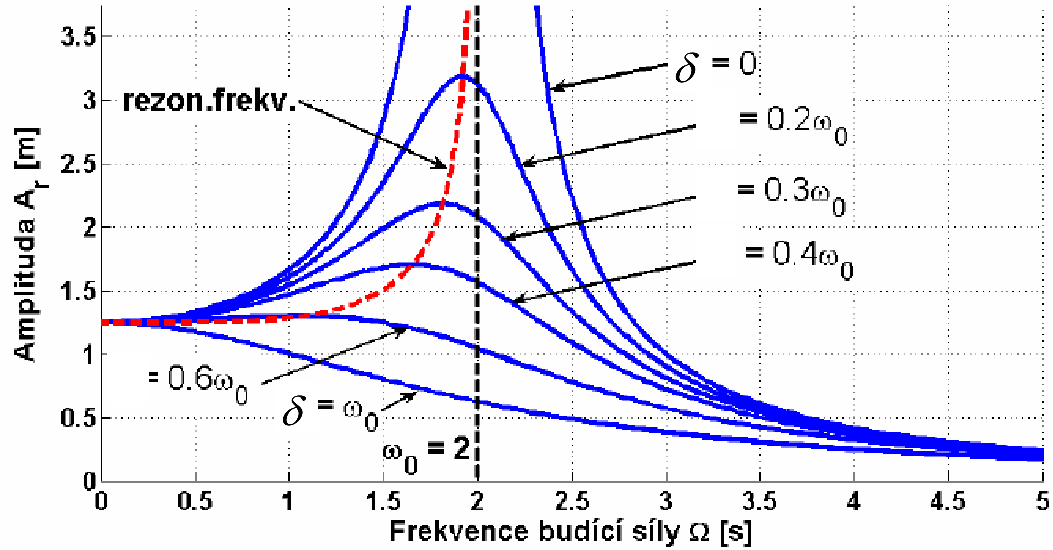
Harmonické kmity vynucené - grafy

Rezonanční křivky:

$$|x_0| = \frac{F_0/m}{\left(\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right)^{1/2}}$$

$$\Omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$ rez. frekvence

$$|x_0|_{\max} = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$ amplituda v rez.

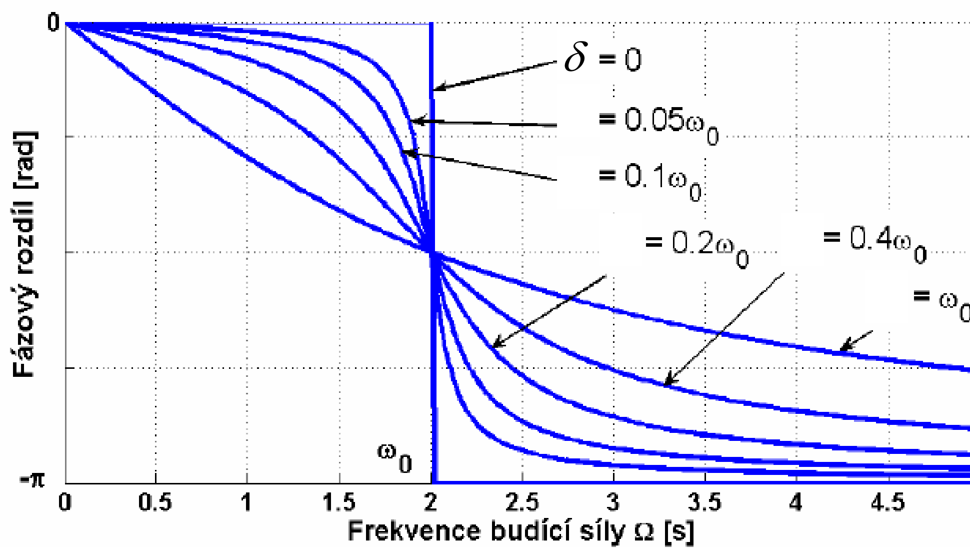


Fázový posuv φ při rezonanci:

$$\tan\varphi = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$\Omega = \Omega_R$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$



$$\Omega \to 0 \ \Rightarrow \varphi \doteq 0 \ (kmity\ ve\ f\acute{a}zi)$$

$$\Omega \to \infty \ \Rightarrow \varphi \doteq -\pi \ (kmity\ v\ protif\acute{a}zi)$$

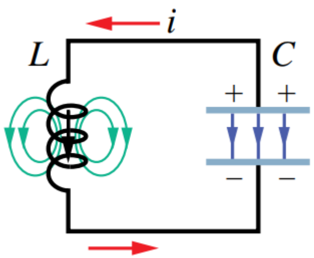
$$\Omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Kmity př.kola motocyklu/ bicyklu

Nucené kmity (náboje, proudu, napětí) vždy převezmou po celkem krátké době budicí úhlovou frekvenci Ω, ať už byla vlastní úhlová frekvence ω jakákoli.

Harmonické kmity – oscilační RLC obvod

LC obvod



Tabulka 33.1 Energie prvků kmitajících soustav

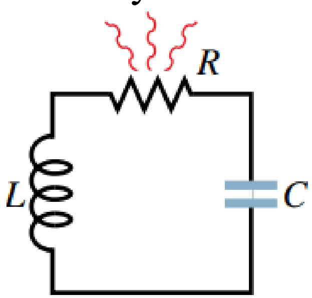
TĚLESO + PRUŽINA		CÍVKA + KONDENZÁTOR	
PRVEK	ENERGIE	PRVEK	ENERGIE
pružina	$E_p = \frac{1}{2}kx^2$	kondenzátor	$E_{el} = \frac{1}{2}(1/C)q^2$
těleso	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	cívka	$E_{mg} = \frac{1}{2}Li^2$
$v = dx/dt$		$i = dq/dt$	

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$L\ddot{q} + q/C = 0$$

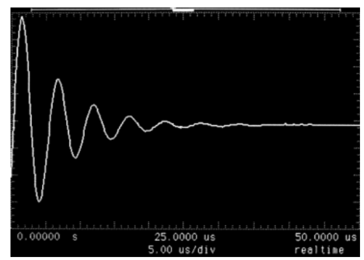
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Sériový RLC obvod

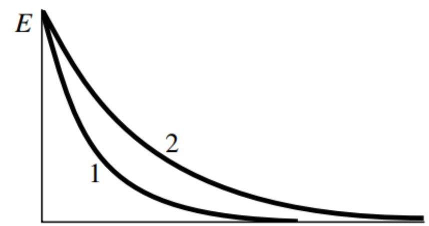


$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - (R/2L)^2}$$

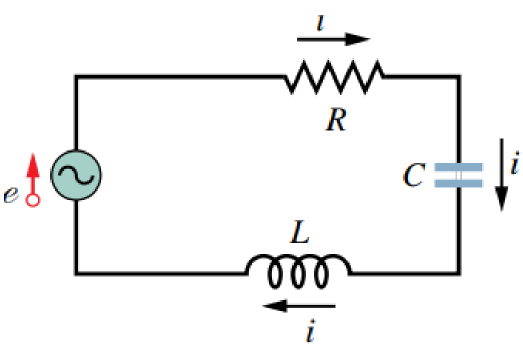


tlumené oscilace



(nad)kritický útlum

Nucené kmity sériového RLC obvodu

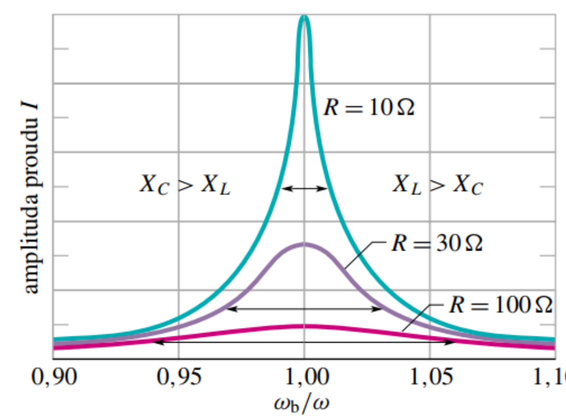


$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dE^{emn}}{dt}$$

$$I_0 = \frac{E_0^{emn}}{Z}, \quad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L}, \quad Q \text{ ... činitel jakosti obvodu}$$

„viz anténa“



3.13 *Rezonanční křivky* buzeného obvodu *RLC*

Harmonické kmity - vynucené

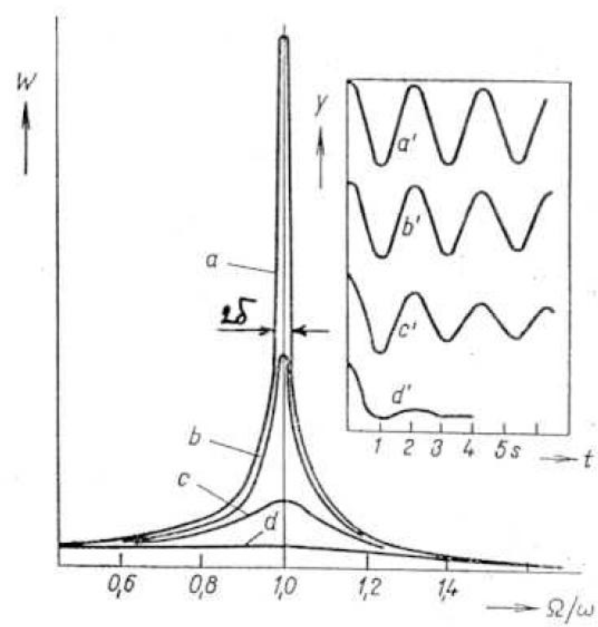
Všechny soustavy v přírodě a mechanické systémy vykazují 1 nebo více vlastních frekvencí
→ rezonance (v závislosti na útlumu)

Př.: rotující zařízení (motory, turbíny …, vyvažování kol), mosty, křídla letadel, kola aut, stožáry, stromy, hudební nástroje, reproduktory, sluchové ústrojí, atomy v krystalové mříži, elektrony ve slupkách atomů; magnetické rezonance: FMR, EPR (spin e., 9GHz), NMR (MRI – ^{1}H, 42.58MHz)

V ustáleném stavu – dodávaný výkon roven výkonu disipativních sil

Velký činitel jakosti Q – malé síly vedou k vysokým výchylkám (úzká res.čára), př.:

El.obvody RLC	1 – 1000
Země, vlny při zemětřesení	200 – 1400
Struna piano	1000
Mikrovlnný (dutinový) resonátor	10^4
Mikrovlnka (22 → 2,45GHz)	
Excitovaný atom	10^7
Excitované jádro Fe^{57}	3.10^{12}



Obr. (3.1) 21. Křivky rezonance rychlosti při různém útlumu

Př. Hřídel: průhyb x, vzdálenost těžiště od osy b, otáčky ω

odhad řešení: $F_{od} = \mathrm{m}\,\omega^2 (b + x)$, $F_{elast} = k.x$, tedy:

$$x = \frac{b}{\frac{k}{\omega^2 m} - 1} = \frac{b}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1} \quad \text{(neuvažujeme tlumení)}$$

Nakreslete graf, diskutujte průhyb hřídele v závislosti na otáčkách ω.

Harmonické kmity - vynucené

Rezonance
http://phet.colorado.edu/sims/resonance/resonance_en.html

http://archive.org/details/SF121
http://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs
http://imechanica.org/node/8280

Stalo se to v roce 1989, v době, kdy se v okolí San Franciska připravovalo zahájení třetí části Světových her. Oblast byla zasažena seizmickými vlnami ze 100 km vzdáleného ohniska zemětřesení poblíž Loma Prieta. Zemětřesení o síle 7,1 stupňů způsobilo rozsáhlé škody a zabilo 67 lidí. Na fotografii vidíme část 1,4 km dlouhého úseku Nimitzovy dálnice, kde došlo k desítkám smrtelných zranění, když se horní betonová deska zřítila na spodní a zasáhla motoristy. Příčinou zřícení byly nepochybně prudké otřesy, vyvolané seizmickými vlnami. Avšak proč byl právě tento úsek tak vážně poškozen, jestliže ostatní úseky dálnice s téměř totožnou konstrukcí zřícení unikly?

)

Parametrická rezonance

Soustava se udržuje v kmitání tím, že se periodicky mění vhodný *vnitřní parametr*

Zvýšení amplitudy → rezonance změnou vnitřních parametrů soustavy
Př. Rozhoupání houpačky vlastní silou
Pozn.: lze zesílit existující kmity (tedy nikoli z klidu)

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2\left(1 + \varepsilon f(t)\right)x = 0, \qquad 0 < \varepsilon << 1$$

pozn. řešení ve tvaru: $x = e^{\beta t}\sin\omega_0 t$

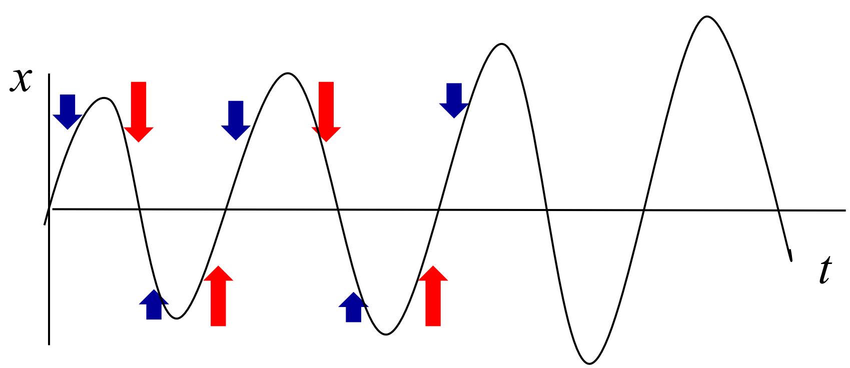
rez. frekvence: $\Omega_p = 2\omega_0$

např: $f(t) = -\sin 2\omega_0 t$

nebo $f(t) = -1$ pro $t \in \langle 0, T/4) \cup \langle T/2, 3T/4)$

$= +1$ $\quad t \in \langle T/4, T/2) \cup \langle 3T/4, T)$

př. kyvadlo – vratná síla: $\sim k = m\omega^2 = \dfrac{m^2 gl}{J} \rightarrow \dfrac{mg}{l}$



$f(t) < 0$

Princip superpozice – lineární systémy

Lin.systémy – př. oscilátor

$$\underbrace{\left(\frac{d^2}{dt^2}+2\delta\frac{d}{dt}+\omega_0^2\right)}_{\mathscr{L}(x)}x=\frac{F(t)}{m}$$

Př.: 2 oscilátory

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2}+k_v\frac{dx_1}{dt}+kx_1=F_1(t)$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2}+k_v\frac{dx_2}{dt}+kx_2=F_2(t)$$

kde funkce $x_1(t)$ a $x_2(t)$ jsou řešeními pro vynucující síly $F_1(t)$ a $F_2(t)$. Sečteme-li obě rovnice

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2)+k_v\frac{d}{dt}(x_1+x_2)+k(x_1+x_2)=F_1(t)+F_2(t) \tag{3.62}$$

Vidíme, že funkce $(x_1 + x_2)(t) = x(t)$ řeší rovnici pro sílu $F_1(t) + F_2(t) = F(t)$.

Rozklad (resp. superpozice) do jednotlivých složek

Princip superpozice – lineární systémy

Lin.systémy – př. lin.oscilátor $$\underbrace{\left(\frac{d^2}{dt^2}+2\delta\frac{d}{dt}+\omega_0^2\right)}_{\mathscr{L}(x)}x=\frac{F(t)}{m}$$

Lineární operátor: $\mathscr{L}(x+y)=\mathscr{L}(x)+\mathscr{L}(y)$,
$\mathscr{L}(ax)=a\,\mathscr{L}(x)$

a) rce $\mathscr{L}(x)=0$
je-li x_1 řešením, pak ax_1 je rovněž řešením: $\mathscr{L}(ax_1)=a\mathscr{L}(x)=0$
jsou-li x_1, x_2 řešením, pak ax_1+bx_2 je rovněž řešením: $\mathscr{L}(ax_1+bx_2)=a\mathscr{L}(x_1)+b\mathscr{L}(x_2)=0$

b) rce $\mathscr{L}(x)=F(t)$
je-li x_p řešením, pak x_1+x_p je rovněž řešením: $\mathscr{L}(x_1+x_p)=\mathscr{L}(x_1)+\mathscr{L}(x_p)=0+F(t)=F(t)$

př.: oscilátor

přechodové řešení stacionární řešení

c) Superpozicce řešení: popisuje-li $x_1(t)$ pohyb pro sílu $F_1(t)$, $x_2(t)$ pohyb pro sílu $F_2(t)$,
potom $x_1(t)+x_2(t)$ popisuje pohyb pro sílu $F_1(t)+F_2(t)$

př.: intenzita gravitačního pole: $\vec{E}=\sum\vec{E}_k$

Princip superpozice – skládání kmitů

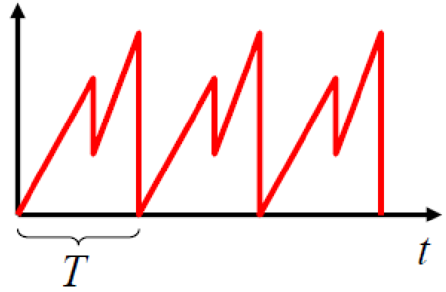
<u>Princip superpozice</u> – např. působí-li na h.b. více sil, výsledný pohyb odpovídá superpozici pohybů (např. kmitů) vyvolaných jednotlivými silami

Každý sebesložitější pohyb lineární soustavy lze vyjádřit jako <u>*superpozici čistě harmonických pohybů*</u>

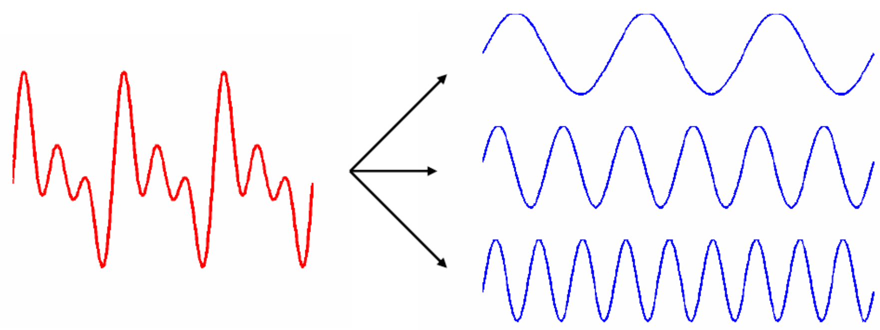
Obecný pohyb je pak určen udáním <u>*amplitudy a fáze*</u> všech těchto pohybů

Každá kmitající lin.soustava je ekvivalentní <u>*souboru harmonických oscilátorů*</u>, jejichž frekvence odpovídají frekvenčním *módům* soustavy

Ot.: jak budeme řešit pro neharmonickou periodickou sílu?

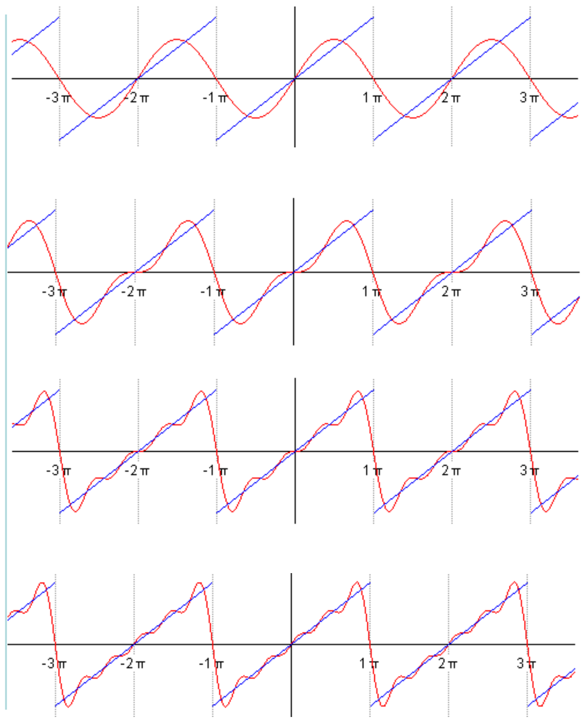


Rozklad kmitů:



Harmonická (Fourierova) analýza

Skládání kmitů

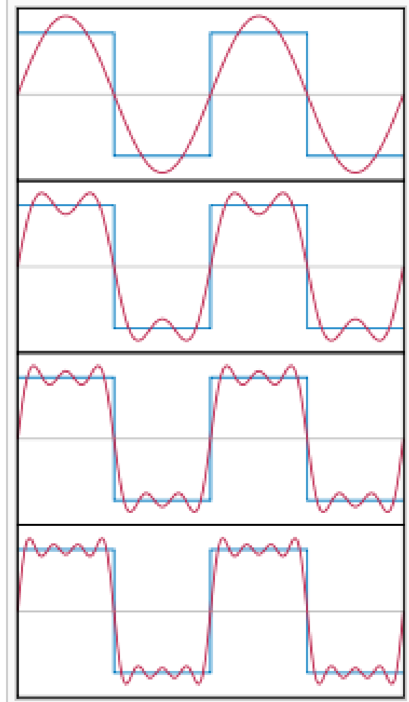


ω, $+A$

2ω, $-A/2$

3ω, $+A/3$

4ω, $-A/4$



The first four Fourier series approximations for a square wave

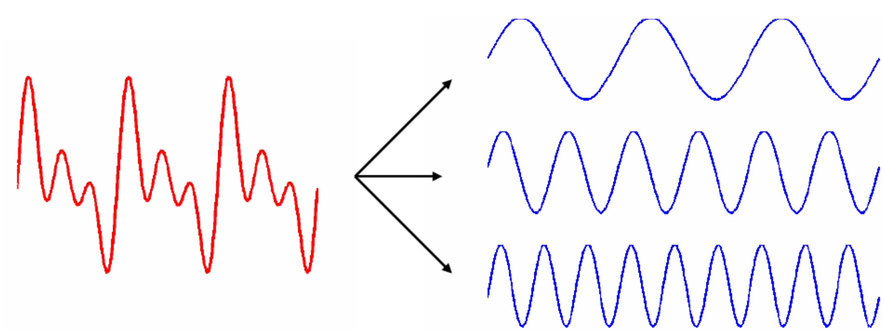
ω, A

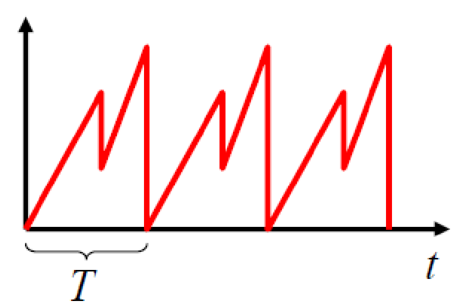
3ω, $A/3$

5ω, $A/5$

7ω, $A/7$

Rozklad kmitů:





Fourier: http://phet.colorado.edu/en/simulation/fourier

Harmonická analýza - Fourierova transformace

- každý periodický pohyb se obecně dá rozložit na jednotlivé harmonické pohyby s frekvencemi *f*, 2*f*, 3*f*,…, kde frekvence *f* se nazývá **1.harmonická** a její násobky tzv. **vyšší harmonické**.

- rozklad je možno provést pomocí **Fourierovy transformace**

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \varphi)$$

Koeficienty rozvoje:

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt$$

Kpx vyjádření:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t}$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{ik\omega t} dt$$

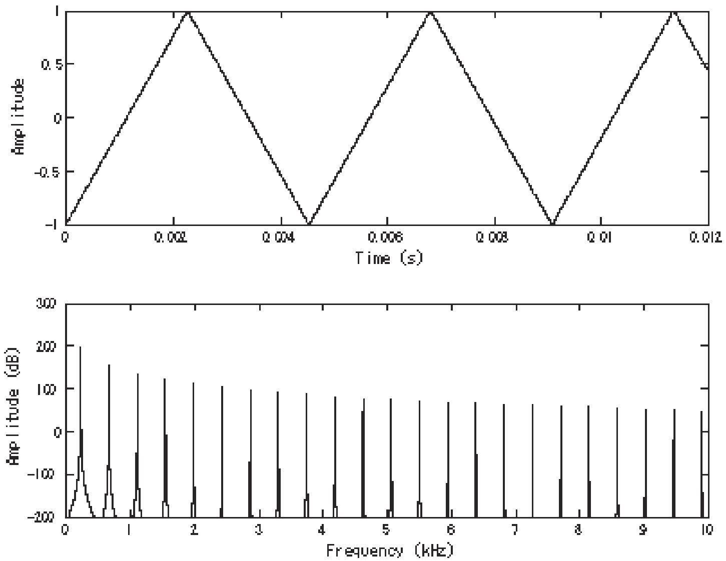
kde

$$C_k = (A_k - iB_k)/2 \quad \text{pro } k > 0$$
$$= (A_k + iB_k)/2 \quad \text{pro } k < 0$$

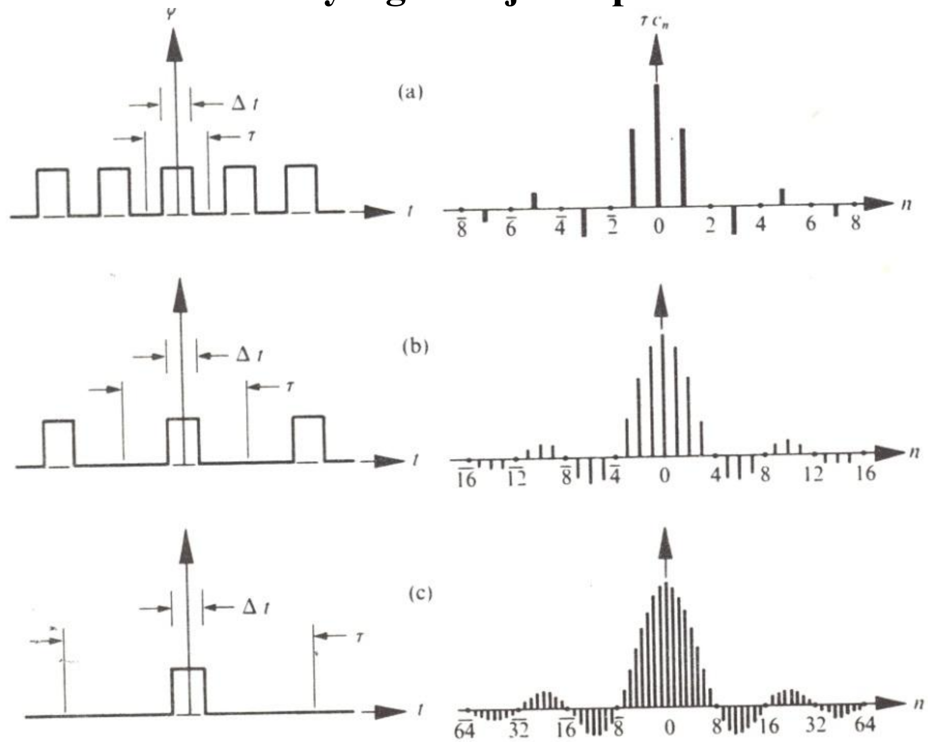
Podmínka – kvadraticky integrabilní fce: $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x < +\infty,$

Harmonická (Fourierova) analýza

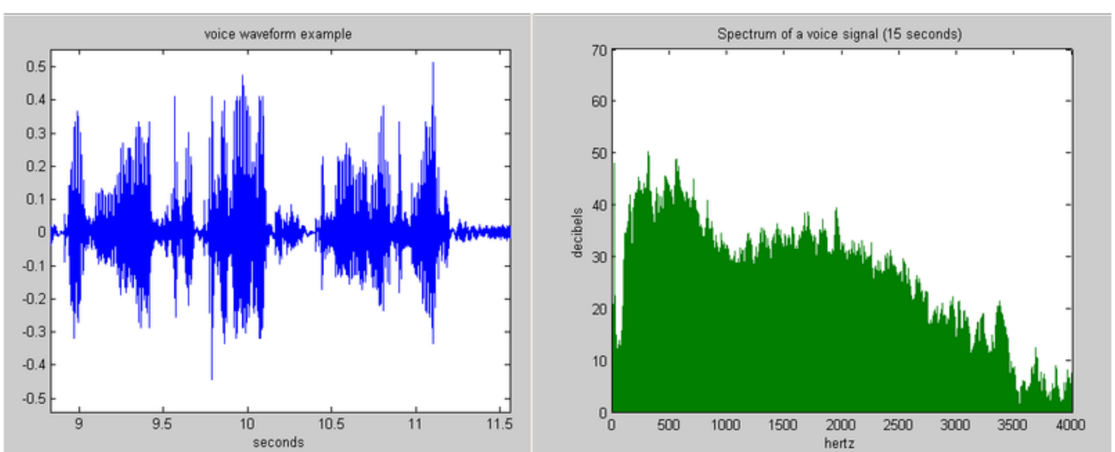
Frekvenční spektrum - čárové



Periodický signál a jeho spektrum



Frekvenční spektrum spojité - neperiodické fce

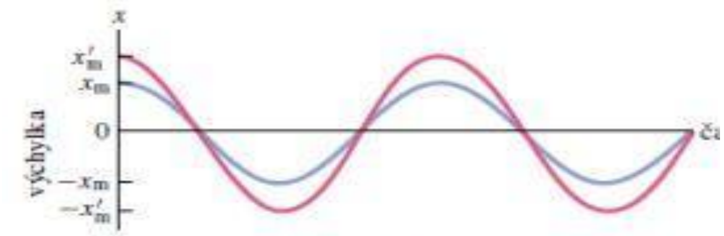


Example of voice waveform and its frequency spectrum

Harmonické kmity

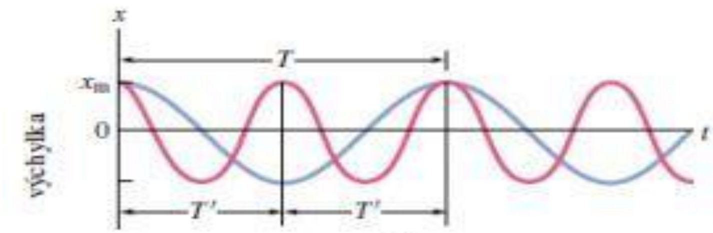
Lineárnost systému + harmonická analýza $\Rightarrow$ důsledek:
každý (periodický) pohyb lze rozložit na elementární harmonické pohyby, jejich složením dostaneme výsledný pohyb (***princip superpozice***)

Skládání kmitů



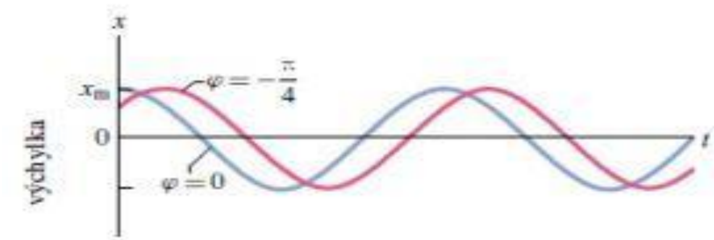
(a)

různé amplitudy



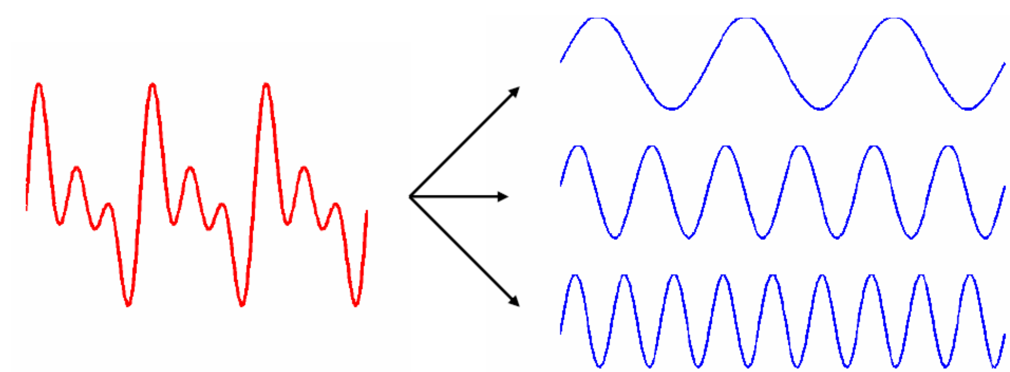
(b)

různé periody (frekvence)



různé počáteční fáze

Rozklad kmitů:



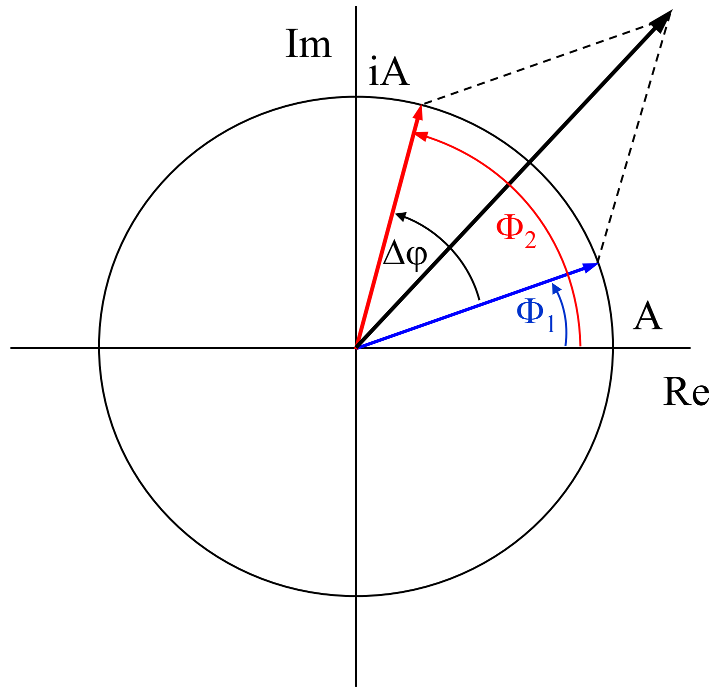
Skládání kmitů

Zobrazení v kpx rovině (pomocí fázorů)

$\hat{x}_1 = A_1 e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)}$ … časový vektor – **fázor …** rotace v kpx rovině s úhlovou frekvencí ω

$\hat{x}_2 = A_2 e^{i(\omega_2 t + \varphi_2)}$

$\Phi_1 = \omega_1 t + \varphi_1$
$\Phi_2 = \omega_2 t + \varphi_2$
$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$



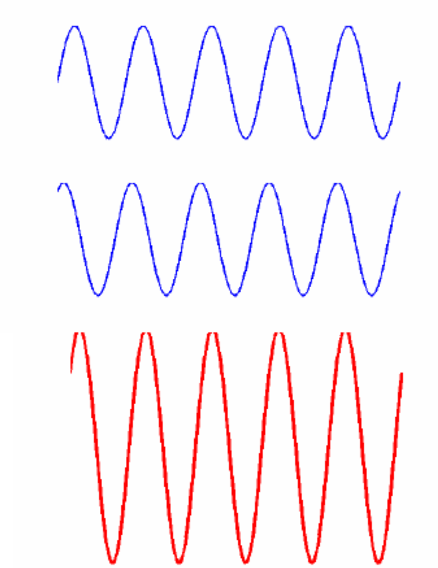
Skládání kmitů

1a) Stejného směru - stejné frekvence

$$u_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \qquad u_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

• výsledný **pohyb je periodický se stejnou frekvencí** $\boxed{u = A\sin(\omega t + \varphi)}$

$$u = u_1 + u_2 = \sin\omega t\,(A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2) + \cos\omega t\,(A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2)$$

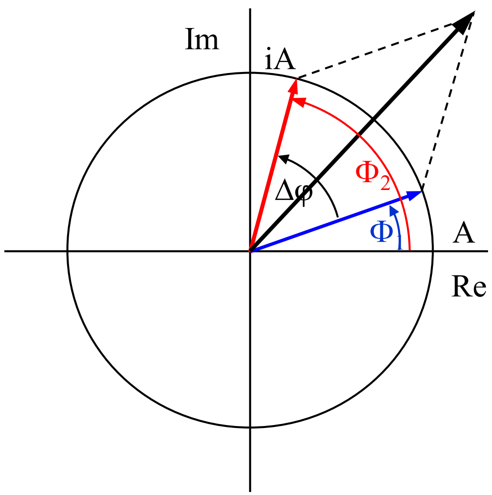


Amplituda:

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Fázové posunutí:

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}}$$



Skládání kmitů

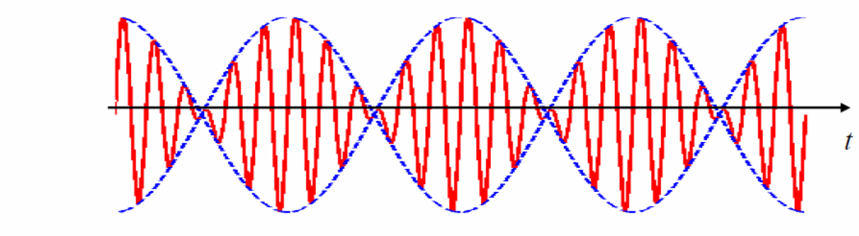
1b) Stejného směru - různé frekvence

$$u = u_1 + u_2 = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A\sin(\omega_2 t + \varphi_2) =$$

$$= 2A\cos\underbrace{\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)}_{\text{pomalu proměnná amplituda } A(t)}\sin\underbrace{\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)}_{\text{harmonický kmitavý pohyb}}$$

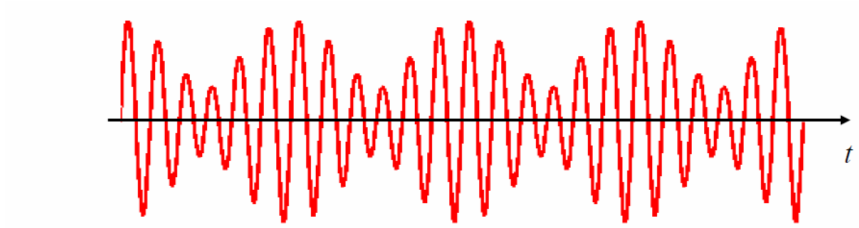
Pro $\omega_1 \approx \omega_2$:

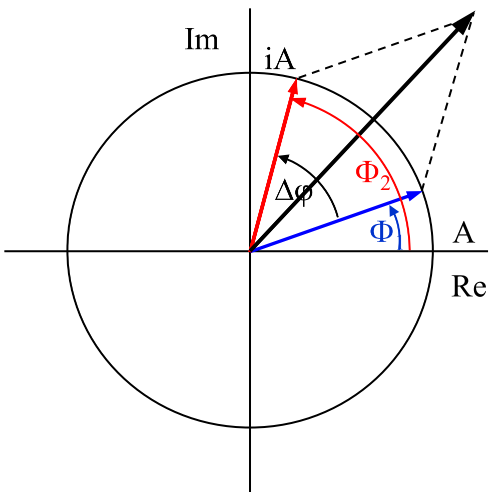
- pokud: $A = A_1 = A_2$



$\Rightarrow$ **rázy**

- pokud: $A_1 \neq A_2$





Skládání kmitů

2) Různého směru – 2 na sebe kolmé směry

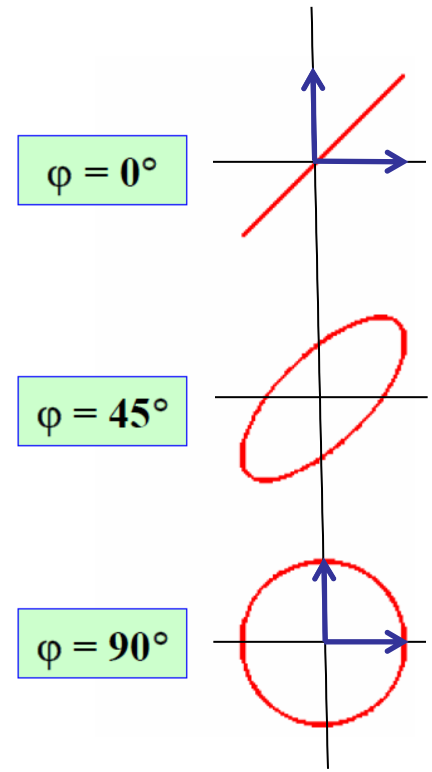
$$x = A_1 \sin(\omega_1 t) \qquad\qquad y = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0)$$

Trajektorie kmitů pro $\omega_1 = \omega_2$: $y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_0) = A_2 \sin\omega t \cos\varphi_0 + A_2 \cos\omega t \sin\varphi_0 =$

$$= \frac{A_2}{A_1} x \cos\varphi_0 + A_2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin\varphi_0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{x^2}{A_1^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2}\cos^2\varphi_0 + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2\varphi_0}$$

rovnice elipsy

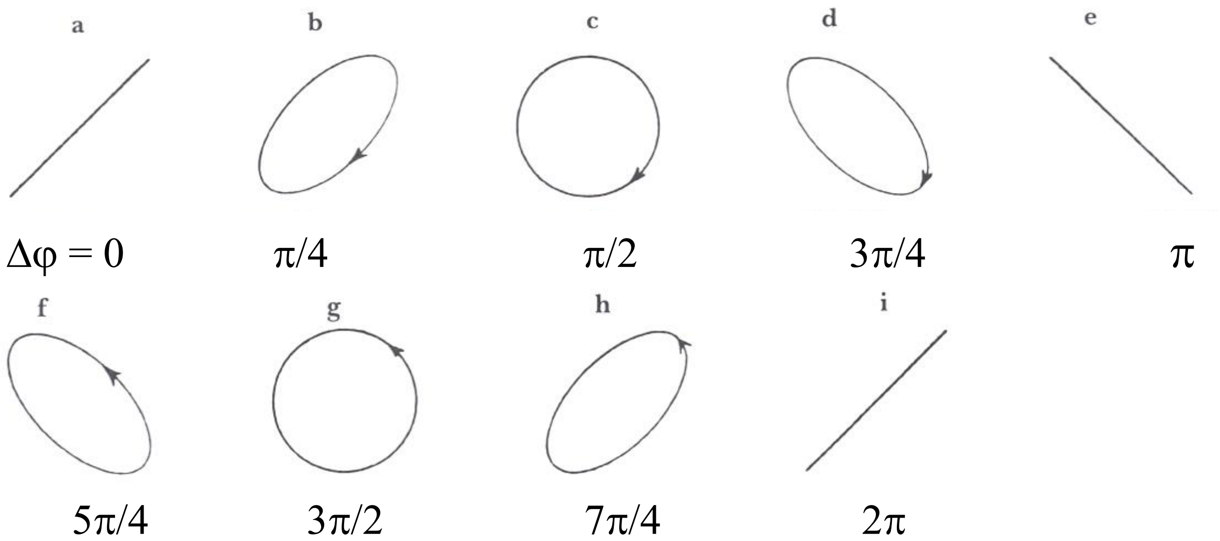


Pro $\varphi_0 = 0, \pi \Rightarrow \underline{(x/A_1 \pm y/A_2) = 0}$ … přímka, **lineární** kmity

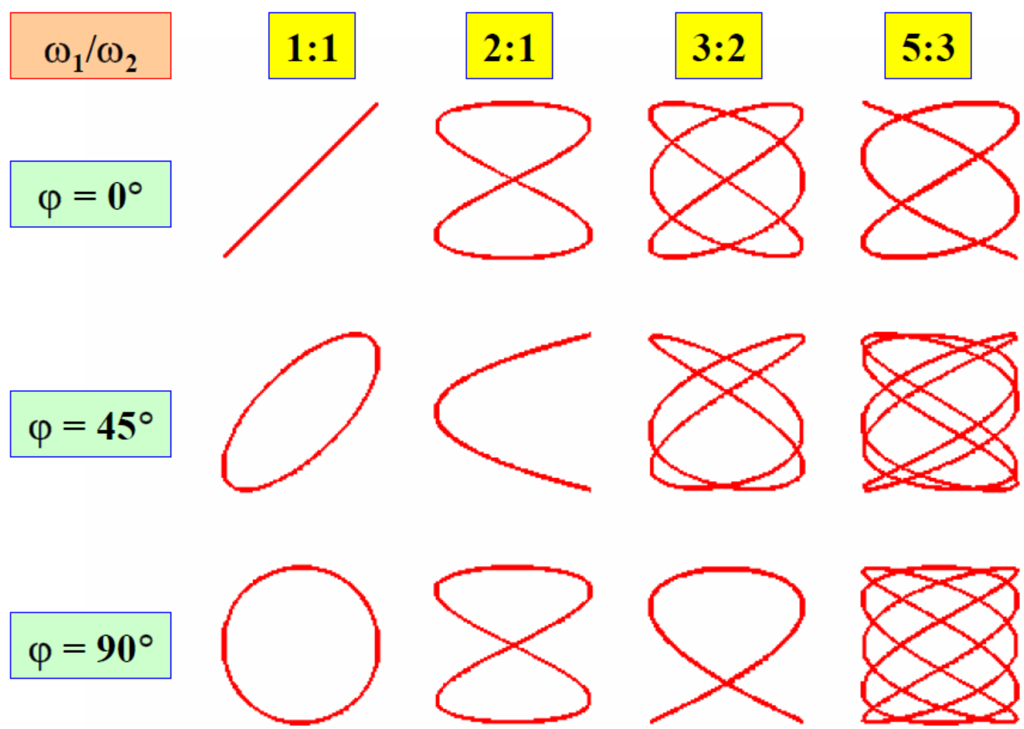
Pro $\varphi_0 = \pi/2 \Rightarrow \underline{(x^2/A_1^2 + y^2/A_2^2) = 1}$ … **elipsa v hlavních osách**

pokud $A_1 = A_2$ kružnice, pravotočivý pohyb, pro $\varphi_0 = 3\pi/2$
levotočivý pohyb po kružnici, **kruhové kmity**

Obecně **eliptické kmity → rozklad do vlastních módů**



Lissajousovy obrazce: $\omega_1 \neq \omega_2$ $\omega_1 / \omega_2 = n_2 / n_1$



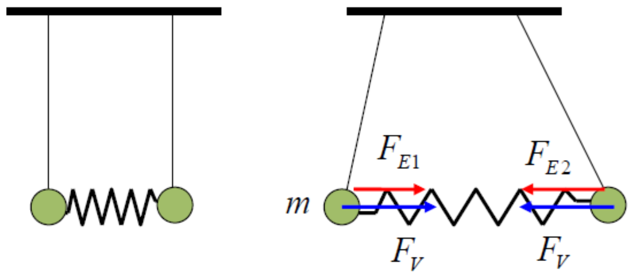
Lissajousovy obrazce:
frekvence v poměru celých čísel

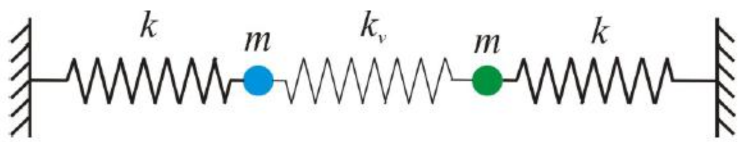
Skládání kmitů

3) Vázané oscilátory –mezi 2 oscilátory působí elastická vazba k_v $F_v = \pm k_v(x_2 - x_1)$

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k_v(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_v(x_2 - x_1)$$





Separace proměnných: rce sečteme/odečteme,
ozn. $x = x_1 + x_2$, $\xi = x_2 - x_1$, potom:

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \ , \qquad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\xi} + \left(\frac{k+2k_v}{m}\right)\xi = 0 \ , \qquad \frac{k+2k_v}{m} = \omega^2$$

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Výsledné kmity:

$$x_1(t) = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\xi \Rightarrow \boxed{x_1(t) = \tfrac{1}{2}(x_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \xi_0\cos(\omega t + \varphi))}$$

$$x_2(t) = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\xi \Rightarrow \boxed{x_2(t) = \tfrac{1}{2}(x_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \xi_0\cos(\omega t + \varphi))}$$

Speciální případ - rázy: (viz skládání kmitů blízkých frekvencí)
Je-li vazba slabá tj. $k_v \ll k$ jsou frekvence ω_0 a ω blízké $\Rightarrow$ periodické zesilování a zeslabování výsledkých kmitů viz graf níže

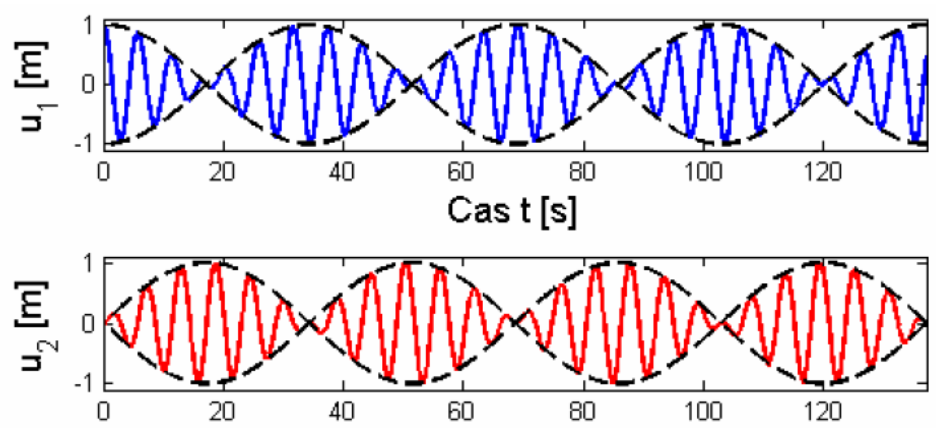
Př.: určete $x_1(t)$, $x_2(t)$ pro poč.podm.: pro t=0: x_1=A, x_2=v_1=v_2=0 (tj. $\Delta\varphi=\pi/2$)

Skládání kmitů

Přelévání energie mezi spřaženými oscilátory

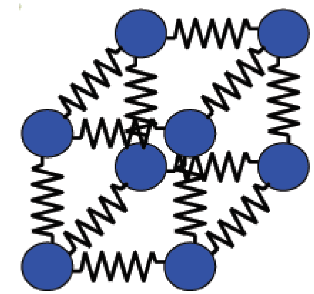
u spřažených oscilátorů vlivem vazby dochází k rázům

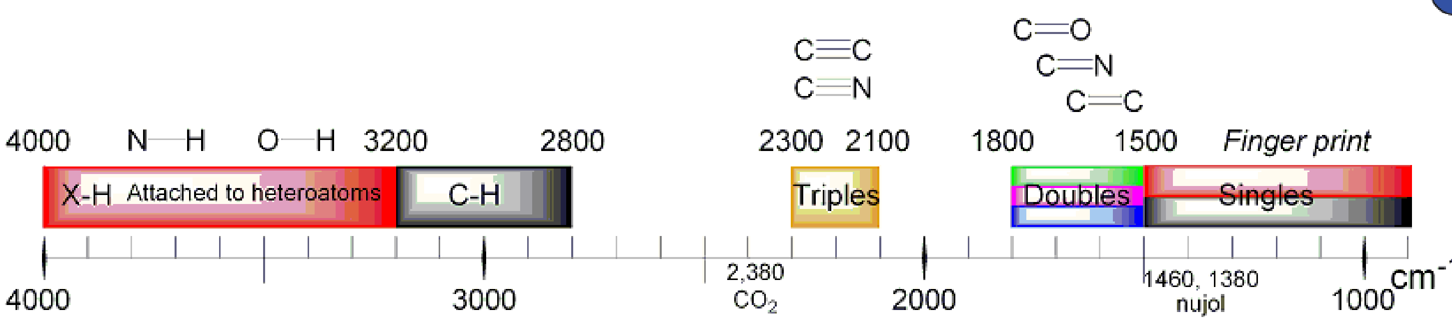
Čím těsnější je vazba mezi oscilátory, tím rychleji se přenáší mezi nimi mechanická energie

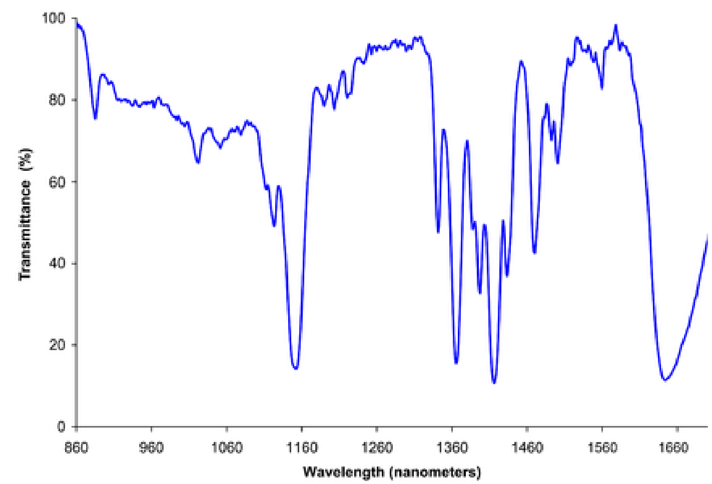


Kmity mříže

IR spectroscopy
http://en.wikipedia.org/wiki/Infrared_spectroscopy







Near IR absorption spectrum of dichloromethane showing complicated overlapping overtones of mid IR absorption features.