5. Otáčení t.t.

Anotace

Otáčení kolem pevné osy, pohybová rovnice, moment setrvačnosti. Těžká kladka, kyvadlo, valení. Tenzor momentu setrvačnosti, Eulerovy pohybové rovnice (přehledně). Hlavní a deviační momenty setrvačnosti. Steinerova věta. Kinetická energie otáčejícího se tělesa.

Vztahy mezi $\boldsymbol{L}$, J, $\boldsymbol{\omega}$, pohybové rovnice

Otáčení kolem <u>pevné</u> osy

Soustava – 1 stupeň volnosti, pohyb.stav určen $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$

(sčítáme přes všechny hm.body $i = 1 \,..\, N$)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E, \quad \text{kde } \vec{L} = \sum \vec{L}_i, \quad \vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad \Rightarrow$$

$\vec{L}_i$ - není $\parallel \vec{\omega}$, osa rotace, $\vec{L}_i \perp$ rovina $(\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$, $\vec{L}_i$ rotuje kol x_3, tj. kol $\vec{\omega}$

Rozklad:

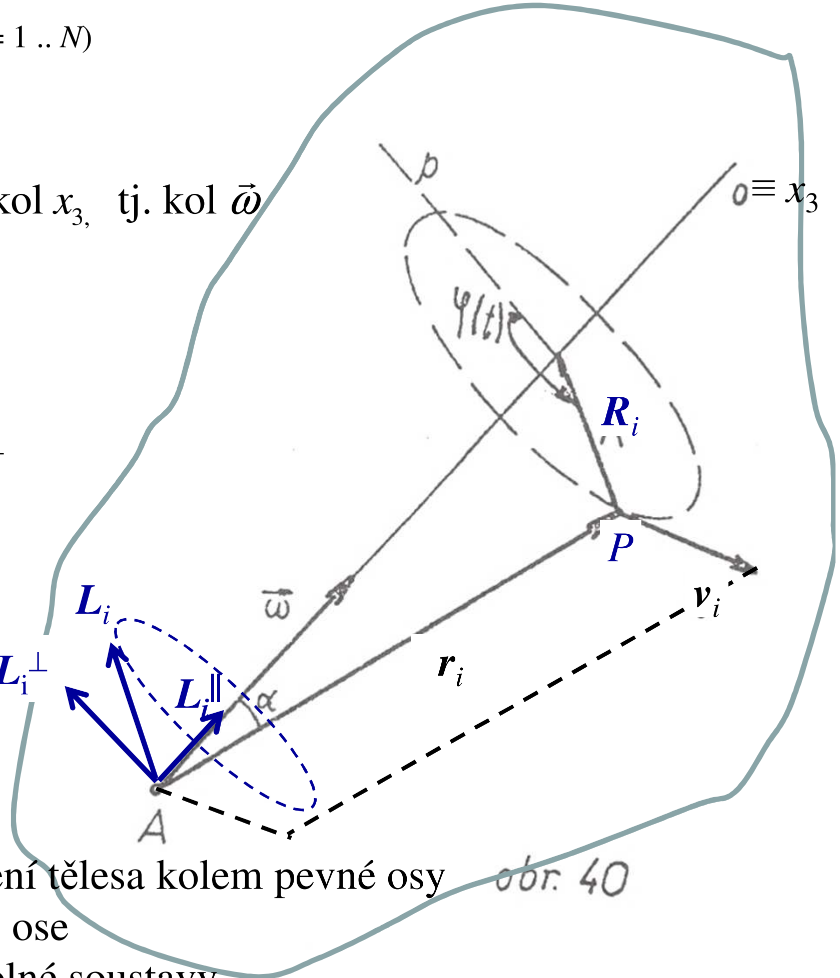
$$\vec{L}_i = \vec{L}_i^{\perp} + \vec{L}_i^{\parallel} \equiv \vec{L}_{ixy} + \vec{L}_{iz}$$ pro celkové momenty:

$$\vec{L} = \vec{L}^{\perp} + \vec{L}^{\parallel}, \quad \vec{M} = \vec{M}^{\perp} + \vec{M}^{\parallel}, \quad \text{tj. } \frac{d\vec{L}^{\parallel}}{dt} = \vec{M}^{\parallel}, \frac{d\vec{L}^{\perp}}{dt} = \vec{M}^{\perp}$$

$$L_i^{\parallel} = L_i \sin\alpha_i = |\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i| \sin\alpha_i = m_i v_i R_i = m_i \omega R_i^2$$

$$L^{\parallel} = \sum L_i^{\parallel} = \omega \sum m_i R_i^2$$ ... sčítají se algebraicky

$$\boxed{L^{\parallel} = J^o \omega, \qquad \text{kde } J^o = \sum m_i R_i^2}$$ moment setrvačnosti vzhledem k pevné ose



$$\boxed{\frac{d\left(L^{\parallel}\right)}{dt} = \frac{d\left(J^o \omega\right)}{dt} = M^{\parallel,E}}$$

Pohybová rovnice pro otáčení tělesa kolem pevné osy

$L^{\parallel}$ se rovněž vztahuje k téže ose

Pozn. Rovnice platí i pro volné soustavy

Pozn. Moment síly $M^{\parallel} \equiv M_3$ způsobuje pohyb v rovině 12, (xy)

pro tuhé soustavy: $$\boxed{J^o \frac{d\omega}{dt} = J^o \varepsilon = M^{\parallel,E}, \quad \text{pro } J^o = \text{konst}}$$

Otáčení t.t. kolem pevné osy

⇨ $\boldsymbol{L}_\perp$, $L_{1,2} = f(\mathrm{t})$, harmonická funkce ⇒ $\boldsymbol{M}_\perp = f(\mathrm{t})$ ⇒

⇨ $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}^{\|} + \boldsymbol{L}^{\perp}$, tj. $\boldsymbol{L}$ není ‖ **ω** (není ‖ s osou rotace)

⇨ $\boldsymbol{L}$ rotuje kolem osy **ω** !

$$\frac{dL_1}{dt} = M_1, \quad \frac{dL_1}{dt} = M_2, \qquad J_{1,2} \neq 0$$

Deviační momenty (t.t. vzhledem k ose rotace) indukované v důsledku toho, že $L_{1,2} \neq 0$

Snaží se vychýlit osu (viz např. tyč rotující kol šikmé osy) :

- pevná osa → deviační momenty kompenzovány v závěsu (ložiskách), $\boldsymbol{L}$ rotuje kolem osy !

- uvolnění osy – osa mění polohu, rotuje v prostoru kolem vektoru $\boldsymbol{L}$ ($\boldsymbol{L}$ pevný – zachovává se! tj. **ω** rotuje kolem L)

⇨ Ot.: Kdy deviační momenty = 0? *)

⇨ Ot.: Co nastane, pokud uvolníme osu? Jak se bude chovat vektor $\boldsymbol{L}$? **)

Zákony zachování: $\boxed{\frac{d}{dt}\left(L^{\|}\right) = \frac{d}{dt}\left(J^{O}\omega\right) = M^{\|,E}}$ ⇒

Pokud $M_3 = 0$, $L_{\|}$= konst. ⇒ $\quad J^{o}\omega = const \quad \Rightarrow \quad J_1^{o}\omega_1 = J_2^{o}\omega_2$

(pozn. platí i pro volnou soustavu)

K.E. pro rotaci kolem pevné osy: $\quad E_k = \frac{1}{2}J^{o}\omega^2 = \frac{L_{\|}^2}{2J^{o}}$

*) při rotaci kol volné osy, **) $\boldsymbol{L}$ bude konstantou pohybu

Translační × Rotační pohyb - analogie

translace		rotace	
dráha	$x, \quad \vec{s}$	úhel	φ
rychlost	$v = \dfrac{ds}{dt}, \quad \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$	úhlová rychlost	$\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
zrychlení	$a_t = \dfrac{dv}{dt}, \quad \vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	úhlové zrychlení	$\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}, \quad \varepsilon = \dfrac{a}{r}$
hybnost	$\vec{p} = m\vec{v}$	moment hybnosti	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
síla	$\vec{F}$	moment síly	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
pohyb.rce	$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	pohyb.rce	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
hmotnost	m	moment setrvačnosti	$J, \quad L^{\parallel} = J^o \omega$
kin. energie	$E_k = \dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{1}{2}mv^2$	kin. energie	$E_k = \dfrac{1}{2}J^o\omega^2$
1. imp.věta	$\vec{F}^E = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$	2. imp.věta	$\vec{M}^E = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

Otáčení t.t. kolem pevné osy

Pozn. Orbitální moment – kvantovaná veličina

Základní jednotka orbitálního momentu: $\hbar = h/2\pi = 1{,}054 \times 10^{-34}$ [Js]

Př.: molekula kyslíku O_2 : $J(O_2) = 2mR^2 = 2.03\times10^{-46}$ kg m^2

$$\omega = \frac{L}{J(O_2)} \approx \frac{\hbar}{J(O_2)} = 5.19\times10^{11} \text{ rad/s} = 8.26\times10^{10} \ \text{s}^{-1}$$

Pozn. Vibrační frekvence ~ 10^{13} s^{-1}

Př. ZZMH:

Orientace satelitu, magnetofon Voyager2, sluneční soustava, galaxie a hvězdokupy, neutronová hvězda, atomy

Demonstrace:

Cviky s činkami na rot.stoličce, pohyb po točně:

- podle jakého zákona se řídí rotace?
- mění se kinetická energie? pokud ano, proč - v důsledku práce jakých sil?
- jaké síly způsobují zrychlování/zpomalování rotace stoličky?

Setrvačné kolo na rot.stoličce

Příklady – počítané na přednášce:

- momenty setrvačnosti: tyč, prstenec, válec
- fyzické a matematické kyvadlo, těžká kladka, nakloněná rovina

Dynamika tuhého tělesa – otáčení kolem pevného bodu

Popis – přístupy:

platí: **a×(b×c) = b(a,c) - c(a,b)**

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = \sum m_k \vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) = \sum m_k \left[(\vec{r}_k, \vec{r}_k)\vec{\omega} - (\vec{\omega}, \vec{r}_k)\vec{r}_k \right]$$

$\Rightarrow$ ***L*** **není ∥ ω**

(až na zvláštní případy)

ve složkách:

∥ **ω**

není ∥ **ω**

$$L_1 = \sum_{k=1}^{N} m_k x_{2k}(\omega_1 x_{2k} - \omega_2 x_{1k}) - m_k x_{3k}(\omega_3 x_{1k} - \omega_1 x_{3k}) = \omega_1 \underbrace{\sum m_k (r_k^2 - x_{1k}^2)}_{J_{11}} - \omega_2 \underbrace{\sum m_k x_{1k} x_{2k}}_{-J_{12}} - \omega_3 \underbrace{\sum m_k x_{1k} x_{3k}}_{-J_{13}}$$

$$L_2 = -\omega_1 \underbrace{\sum m_k x_{2k} x_{1k}}_{-J_{21}} + \omega_2 \underbrace{\sum m_k (r_k^2 - x_{2k}^2)}_{J_{22}} - \omega_3 \underbrace{\sum m_k x_{2k} x_{3k}}_{-J_{23}}$$

$$L_3 = -\omega_1 \underbrace{\sum m_k x_{3k} x_{1k}}_{-J_{31}} - \omega_2 \underbrace{\sum m_k x_{3k} x_{2k}}_{-J_{32}} + \omega_3 \underbrace{\sum m_k (r_k^2 - x_{3k}^2)}_{J_{33}}$$

***J**$_{ij}$* **– tenzor setrvačnosti**

symetrický tenzor 2. řádu

(6 nezávislých složek)

$$\boxed{\begin{aligned} L_1 &= J_{11}\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3 \\ L_2 &= J_{12}\omega_1 + J_{22}\omega_2 + J_{23}\omega_3 \\ L_1 &= J_{13}\omega_1 + J_{23}\omega_2 + J_{33}\omega_3 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{12} & J_{22} & J_{23} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{L_i = \sum_{j=1}^{3} J_{ij}\omega_j \equiv J_{ij}\omega_j}$$

Dynamika tuhého tělesa – otáčení kolem pevného bodu

Popis – přístupy:

platí: **a×(b×c) = b(a,c) - c(a,b)**

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = \sum m_k \vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) = \sum m_k \left[\underbrace{(\vec{r}_k, \vec{r}_k)\vec{\omega}}_{\parallel \boldsymbol{\omega}} - \underbrace{(\vec{\omega}, \vec{r}_k)\vec{r}_k}_{\text{není} \parallel \boldsymbol{\omega}} \right]$$

$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{L} \text{ není} \parallel \boldsymbol{\omega}}$

ve složkách:

$$L_1 = \sum_{k=1}^{N} m_k x_{2k}(\omega_1 x_{2k} - \omega_2 x_{1k}) - m_k x_{3k}(\omega_3 x_{1k} - \omega_1 x_{3k}) = \omega_1 \underbrace{\sum m_k (r_k^2 - x_{1k}^2)}_{J_{11}} - \omega_2 \underbrace{\sum m_k x_{1k} x_{2k}}_{-J_{12}} - \omega_3 \underbrace{\sum m_k x_{1k} x_{3k}}_{-J_{13}}$$

$L_2 = \dots \quad L_3 = \dots$

$$L_i = \sum_{j=1}^{3} J_{ij}\omega_j \quad \Leftrightarrow$$

$$M_i = \frac{d\left(\sum_{j=1}^{3} J_{ij}\omega_j\right)}{dt}$$

$$L_i = J_{ij}\omega_j$$

$$M_i = \frac{d(J_{ij}\omega_j)}{dt}$$

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_{i,j} J_{ij}\omega_i\omega_j$$

$$J = \sum_{i,j} a_i a_j J_{ij}$$

$$E_k = \frac{1}{2} J_{ij}\omega_i\omega_j$$

$$J = a_i a_j J_{ij}$$

$$J_{ij} = \sum_{k=1}^{N} m_k (r_k^2 \delta_{ij} - x_{ik} x_{jk}) = \int (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j)\, dm$$

kde $\delta_{ij} = 1$ (pro $i = j$), $\delta_{ij} = 0$ (pro $i \neq j$)

$i, j -$ indexy souřadnic (Einsteinovo sumační pravidlo)

$k = 1..N -$ počet hm.bodů

J_{ij} složky tenzoru momentu setrvačnosti

symetrický tenzor 2. řádu: $J_{ij} = J_{ji}$

ω_i složky vektoru úhlové rychlosti

J velikost momentu setrvačnosti pro směrové kosiny

$a_i = \cos\alpha_i$

1) Laboratorní s.s.

(1) Laboratorní s.s. TT1

$$\vec{L} = \sum m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum m_i \left[\vec{\omega}\, r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i, \vec{\omega})\right]$$

$$L_1 = \omega_1 \sum m_i (r_i^2 - x_{1i}^2) - \omega_2 \sum m_i x_{1i} x_{2i} - \omega_3 \sum m_i x_{1i} x_{3i}$$

$$L_2 = -\omega_1 \sum m_i x_{2i} x_{1i} + \omega_2 \sum m_i (r_i^2 - x_{2i}^2) - \omega_3 \sum m_i x_{2i} x_{3i}$$

$$L_3 = -\omega_1 \sum m_i x_{3i} x_{1i} - \omega_2 \sum m_i x_{3i} x_{2i} + \omega_3 \sum (r_i^2 - x_{3i}^2)$$

součet přes všechny h.b. $i=1..N$

ozn.: $J_{11} = \sum m_i (r_i^2 - x_{1i}^2) \rightarrow \int (r^2 - x_1^2) \varrho\, dV$, $J_{12} = -\sum m_i x_{1i} x_{2i} \rightarrow \int x_1 x_2 \varrho\, dV$, $J_{13} = -\sum m_i x_{1i} x_{3i} \rightarrow \int x_1 x_3 \varrho\, dV$

$$\begin{cases} L_1 = J_{11}\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3 \\ L_2 = J_{21}\omega_1 + J_{22}\omega_2 + J_{23}\omega_3 \\ L_3 = J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + J_{33}\omega_3 \end{cases}$$

J_{ij} – charakterizuje určitou vlastnost (tělesa) v daném místě prostoru

$$\boxed{L_i = \sum_{j=1}^{3} J_{ij}\omega_j} \qquad i,j = 1,2,3$$

součet přes souřadnice $i,j=1,2,3$

tvar závisí na volbě SS

při změně SS →
- vlastnost se nemění
- mění se čísla v matici

$$\boxed{L_i = J_{ij}\omega_j} \quad \ldots \text{ sum. konvence}$$

$$\vec{L} = \overleftrightarrow{J}\vec{\omega} \quad \ldots \quad \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

↑ tenzor 2.ř.

$$\boxed{\frac{d}{dt}(J_{ij}\omega_j) = M_i}$$

$$M_i = \frac{dL_i}{dt} = \frac{d\left(J_{ij}\omega_j\right)}{dt}$$

$$J_{ij} = \sum_k m_k (r_k^2 \delta_{ij} - x_i x_j) = \int (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j)\, dm$$

- $\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$; ($\nexists$ konst. k, aby $\vec{L} = k\vec{\omega}$) ⇒ složité chování rotujících soustav
- $J_{ij} = J_{ji}$ symetrický tenzor 2.ř., 6 nezávislých složek
- lSS: $J_{ij} = f(t, x_i)$ AVŠAK $\overleftrightarrow{J}$ vs. SS ?

$J_{11} = \sum m_i (x_{2i}^2 + x_{3i}^2)$ … mom. setr. kolem osy x_1

J_{ij}, $i \neq j$ deviační momenty

$\sum J_{ii} = J_{11} + J_{22} + J_{33} = 2\sum m_i r_i^2 \rightarrow 2\int \rho(\vec{r})\, r^2 dV$ … izotropní (nezávisí na orientaci os)

$$E_k = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}M_c v_S^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\sum m_i v_{i(S)}^2}_{E_k^{rot}}$$

$$E_k^{rot} = \frac{1}{2}\sum m_i (\vec{\omega}\times\vec{r}_i)^2 \rightarrow \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 dV$$

$$E_k^{rot} = \frac{1}{2}\sum_{i=1..3} m_i\left[\left(\omega_2 x_3^i - \omega_3 x_2^i\right)^2 + \left(\omega_3 x_1^i - \omega_1 x_3^i\right)^2 + \left(\omega_1 x_2^i - \omega_2 x_1^i\right)^2\right] = \ \dots \ \rightarrow$$

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}\omega_i\omega_j = \frac{1}{2}J_{ij}\omega_i\omega_j$$

tj. $\mathbf{E_k} = \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 J_{11} + \omega_2^2 J_{22} + \omega_3^2 J_{33} + 2\omega_1\omega_2 J_{12} + 2\omega_2\omega_3 J_{23} + 2\omega_1\omega_3 J_{13}\right)$

$$E_k = \frac{1}{2}J_{ij}\omega_i\omega_j$$

$$J = a_i a_j J_{ij}$$

plocha 2. stupně

$J_{ij} > 0 \quad \forall i,j$ ... elipsoid setrvačnosti (3 osy)

reprezentuje kvadratickou plochu v proměnných ω_1, ω_2, ω_3 pro $J_{ij} > 0$ $\forall$ i, j… trojosý elipsoid

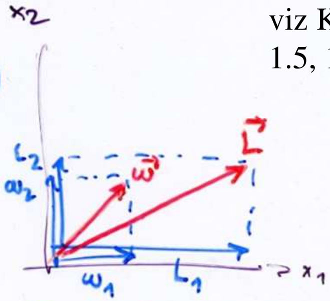
- symetrický tenzor 2.ř. lze reprezentovat kvadr. plochou
- osy s.s. orientujeme ‖ s osami elipsoidu →
- **hlavní osy setrvačnosti (volné osy)** →
- **diagonální matice** J_{ij} :

$$\begin{pmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33} \end{pmatrix}$$

viz Kvasnica – Matematický aparát fyziky, kap. 1.5, 1.6 – vlastní čísla matice

$$\boxed{\begin{aligned} L_1 &= J_{11}\omega_1 \\ L_2 &= J_{22}\omega_2 \\ L_3 &= J_{33}\omega_3 \end{aligned}}$$

$\vec{\omega} \nparallel \vec{L}$



Při rotaci kolem hlavní osy je $\boldsymbol{L}\|\boldsymbol{\omega}$ (tzv. **volná osa**)
Při rotaci kol lib. jiné osy $\boldsymbol{L}$ a $\boldsymbol{\omega}$ nejsou ‖.

$$E_k = J_{ii}\omega_i^2 = J_{11}\omega_1^2 + J_{22}\omega_2^2 + J_{33}\omega_3^2 = \frac{L_1^2}{J_{11}} + \frac{L_2^2}{J_{22}} + \frac{L_3^2}{J_{33}}$$

- $\forall$ těleso lib. tvaru → elipsoid set. →
- 3 hlavní osy navzájem ⊥ – diag. tenzor
- pro rotaci kolem hl. os : $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

pozn. každá osa symetrie je zároveň volnou osou

Tenzor momentu setrvačnosti

Zapamatujeme si:
v tělese lib.tvaru existují 3 navzájem kolmé osy procházející hmotným středem - **hlavní osy** (**volné osy**); těleso rotující kolem hlavních os zachovává směr rotace (neboť deviační momenty $J_{ij} = 0$ pro $i \neq j$)

Pro rotaci v hlavních osách je $\boldsymbol{L} \parallel \boldsymbol{\omega}$

Podrobný popis: J.Kvasnica, Mechanika

2) S.S. pevně spojená s tělesem

② Eulerovy rce – ss pevně spojené s tělesem!!

platí: $\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_I - \left.\frac{d\vec{A}'}{dt}\right|_{ST} = \vec{\omega} \times \vec{A}$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E$ platí jen v ISS

převod rce do NISS

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left.\frac{d\vec{L}'}{dt}\right|_S + \vec{\omega} \times \vec{L}_S = \vec{M}^E$

$\vec{\omega}$ … rychlost rotace s.s. od tělesa vůči rot. ss

$$M_i = \frac{dL_i}{dt} = \frac{d\left(J_{ij}\omega_j\right)}{dt}$$

$J_{ij} = f(t)$!! … jak budeme řešit?
→ přechod do ss spojené s tělesem !

Pozor: od této chvíle jsou všechny veličiny (L, ω, J, M) odečítány vůči rotující s.s. ! (tj. všechny jsou čárkované, budeme si to pamatovat a nebudeme je zvlášť označovat čárkou)

$$\frac{dL'_1}{dt} + \omega'_2 L'_3 - \omega'_3 L'_2 = M'^E_1$$
$$\frac{dL_2}{dt} + \omega_3 L_1 - \omega_1 L_3 = M^E_2$$
$$\frac{dL_3}{dt} + \omega_1 L_2 - \omega_2 L_1 = M^E_3$$

ve složkách

~~Euler~~

pro $L_i = J_{ij}\omega_j$, $J_{ij} \neq f(t)$, $\omega_i = f(t)$

(*) $$J_{11}\frac{d\omega_1}{dt} + J_{12}\frac{d\omega_2}{dt} + J_{13}\frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1\omega_2 J_{31} + \omega_2^2 J_{32} + \omega_2\omega_3 J_{33} - \omega_3\omega_1 J_{21} - \omega_3\omega_2 J_{22} - \omega_3^2 J_{23} = M_1^E$$

↔ namísto $\frac{d\left(J_{ij}\omega_j\right)}{dt} = M_i$ (pozn. vždy platí: $L_i = J_{ij}\omega_j$)

(a podobně pro 2. a 3. složku $M_{2,3}$)

v hlavních osách: (Euler)

$$\boxed{\begin{aligned} J_{11}\frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\omega_3\left(J_{33} - J_{22}\right) &= M_1^E \\ J_{22}\frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1\omega_3\left(J_{11} - J_{33}\right) &= M_2^E \\ J_{33}\frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1\omega_2\left(J_{22} - J_{11}\right) &= M_3^E \end{aligned}}$$

3 diferenciální rce pro $\omega_i(t)$
→ diagonalizace t. $\overleftrightarrow{J}$
→ 3 navzájem kolmé osy zvolíme za osy finální ss
→ J_{ij} konst. hodnoty

Eulerovy rovnice (v hlavních osách):

$$J_{11}\frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\omega_3\left(J_{33} - J_{22}\right) = M_1^E$$
$$J_{22}\frac{d\omega_2}{dt} + \omega_1\omega_3\left(J_{11} - J_{33}\right) = M_2^E$$
$$J_{33}\frac{d\omega_3}{dt} + \omega_1\omega_2\left(J_{22} - J_{11}\right) = M_3^E$$

$$\frac{d(\vec{L}\cdot\vec{L})}{dt} = 2\vec{L}\cdot\frac{d\vec{L}}{dt} = -2\vec{L}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{L}) = 0 \quad (\perp \text{vektory})$$

↳ $\frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{L} = \vec{M}^E = 0$

$\vec{L}\cdot\vec{L} = L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = \text{konst}$ pro $\vec{M}^E = 0$

Př: Rotace tt kolem osy x_3 (v ss spojené s tělesem)

Otáčení t.t. kolem pevné osy ∥ x_3,
(tj. osa rotace není ∥ s hl.osou, je třeba
použít obecnou rci)

$\vec{\omega} = (0\ 0\ \omega_3)$

$L_1 = J_{13}\,\omega_3$

$L_2 = J_{23}\,\omega_3$

$L_3 = J_{33}\,\omega_3$ → $\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$

$$J_{13}\frac{d\omega_3}{dt} - \omega_3^2 J_{23} = M_1$$

$$J_{23}\frac{d\omega_3}{dt} + \omega_3^2 J_{13} = M_2$$

$$J_{23}\frac{d\omega_3}{dt} = M_3 \rightarrow (1)$$

⇐ 3 rce (*) min.str.

otáčení tt kolem pevné osy $J\frac{d\omega}{dt} = M_{\parallel}^{E}$

- pro $M_3 = 0$ → $\omega_3 = \text{const}$

→ AVŠAK je-li $J_{13}, J_{23} \neq 0$ → musí ∃ momenty $M_1, M_2 \neq 0$ aby se udržela rotace kolem x_3 konstantní!

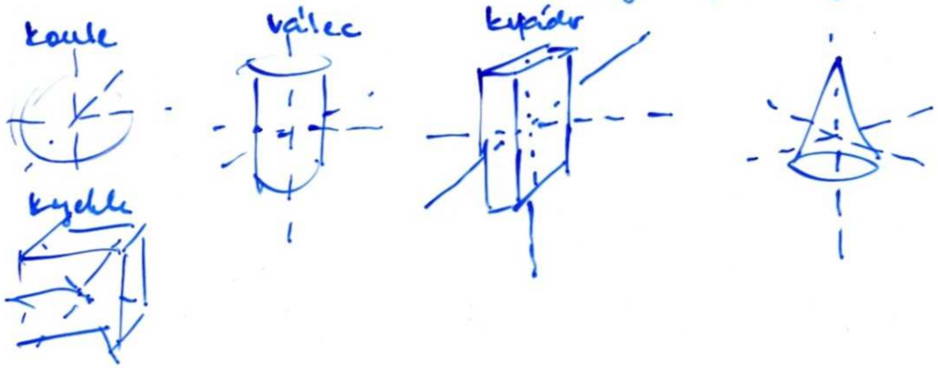
→ vznik momentů sil působící na osu: M_1, M_2

deviační momenty → síly působící na osu

→ osa rotace nemá v tt ani v prostoru stálou polohu – putuje i v případě $M^E = 0$

J_{ij} pro $i \neq j$

→ rotace v hlavních osách ... $J_{ij} = 0$ pro $i \neq j$



Volný setrvačník

VOLNÝ SETRVAČNÍK : $\vec{M}^E = 0$

a) kulový setrvačník

$J_i = J \quad \forall i$ $\qquad J\frac{d\omega_1}{dt} = J\frac{d\omega_2}{dt} = J\frac{d\omega_3}{dt} = 0 \iff \vec{\omega} = const.$

$\vec{L} = J\vec{\omega}$

stálá osa rotace v tělese i v prostoru

b) symetrický setrvačník (v ss spojené s tělesem)

$J_1 = J_2 \neq J_3 \equiv J_{33}$, $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\vec{M}^E = 0$ $\qquad \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$

Euler.rce:

$$\begin{cases} J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\omega_3(J_3 - J_1) = 0 \\ J_1 \frac{d\omega_2}{dt} - \omega_1\omega_3(J_3 - J_1) = 0 \\ J_3 \frac{d\omega_3}{dt} = 0 \end{cases}$$

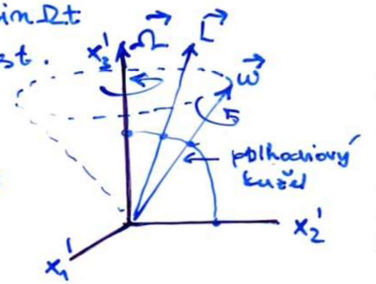
def: $\Omega = \frac{J_3 - J_1}{J_1}\omega_3$

$\Rightarrow \omega_3 = const.$

$$\begin{cases} \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2\Omega = 0 \\ \frac{d\omega_2}{dt} - \omega_1\Omega = 0 \end{cases} \quad \text{řeš:} \quad \begin{cases} \omega_1 = A\cos\Omega t \\ \omega_2 = A\sin\Omega t \\ \omega_3 = const. \end{cases}$$

Ω ... rychlost precese v tělese

$L_i = J_i\omega_i$



$\vec{M} = 0 \to \vec{L} = const$ ... pevný v prostoru

v tělese se stáčí kol. x_3

$|\vec{\omega}| = \sqrt{\sum \omega_i^2} = const.$

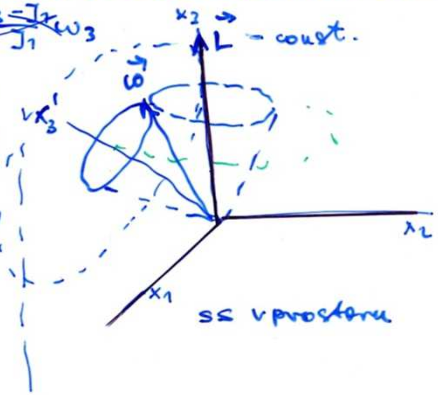
$\vec{L}, \vec{\omega}, x_3$ ... leží v rovině

v lab. ss → regulární precese setrvačníku

otáčení osy symetrie set. kolem směru vektoru $\vec{L} = const.$

úhlovou rychlostí $\Omega_p = \cancel{\frac{J_3 - J_1}{J_1}\omega_3}$

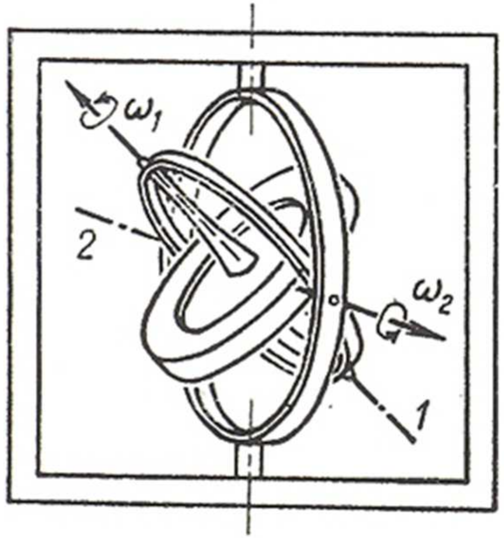
$\Omega_p \doteq \frac{L}{J_1} = \frac{\omega_3 J_3}{J_1} = \Omega\frac{J_3}{J_3 - J_1}$



c) pro $\omega = (0\ 0\ \omega_3)$: $L_3 = J_3\omega_3$, $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$,

stálý směr rotace

volná osa – tt udržuje stálou rotaci, není třeba udržovat osu pomocí vazby

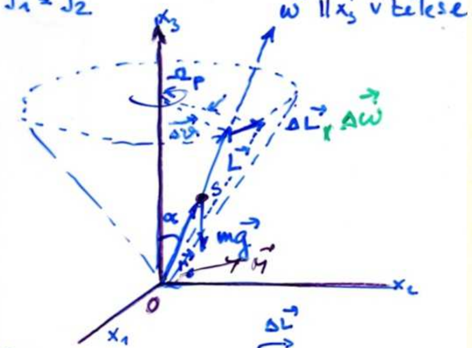


Těžký symetrický setrvačník $\quad \vec M^E \neq 0$

- otáčení v tíhovém poli kolem bodu, který není hmotným středem tělesa

předp. ω -- velké, $\quad J_3 \gg J_1 = J_2$ $\qquad \vec\omega \parallel x_3'$ v tělese

potom $\vec L \parallel \vec r_s$



$$\vec M^E = \vec r_s \times m\vec g = \frac{d\vec L}{dt}$$

$d\vec L \parallel \vec M^E$

$d\vec L \perp \vec L$

$\quad\;\; \perp \vec F$

⇒ velikost $\vec L$ se zachovává

⇒ mění se jen směr $\vec L$ s časem

⇒ $\vec L$ se pohybuje po plášti kužele

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L\,\Delta\vartheta}{\Delta t} = L\cdot\Omega_p \sin\alpha = J\omega\Omega_p \sin\alpha$$

$$\vec M = \vec\Omega_p \times \vec L = \vec r_s \times m\vec g \quad \longrightarrow \quad \Omega_p L \sin\alpha = r_s m g \sin\alpha$$

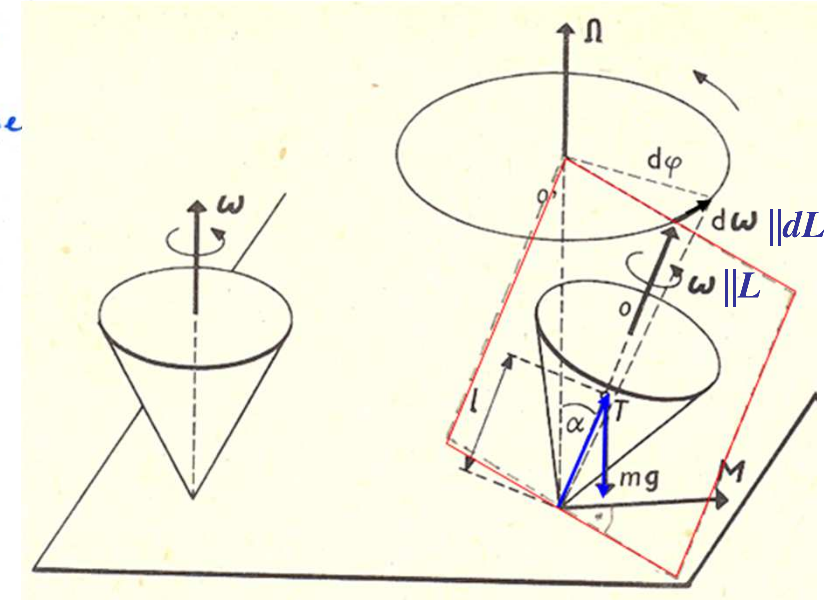
$\vec\Omega \uparrow\downarrow \vec g \;,\;\; \vec L \parallel \vec r_s$

$$\Omega_p = \frac{r_s m g}{L} = \frac{r_s m g}{J\omega}$$

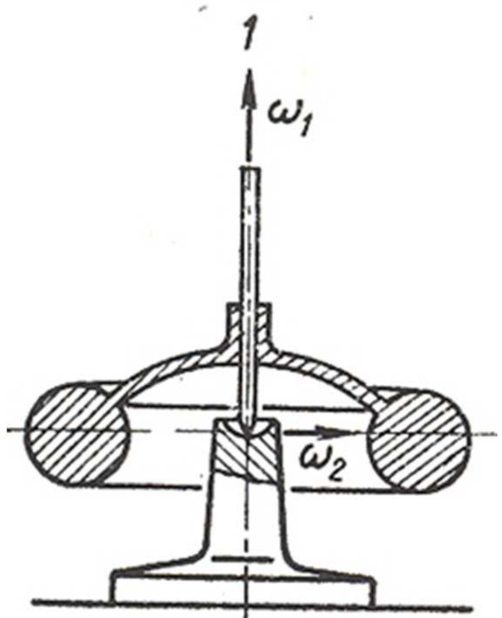
$$M = \Omega_p \cdot L \cdot \sin\alpha = \Omega_p J\omega \sin\alpha$$

$\alpha \ldots \vec\omega - \vec\Omega$

- bez tíhového pole : $\vec L = \text{const}$
- pro $\omega \downarrow \; \rightarrow \Omega_p \uparrow$



- precese těžkého setrvačníku (cvič.)



Gyroskopický efekt – kinetická reakce setrvačníku

vznik momentu sil při změně rot. osy

umělý horizont

gyrokompas

stabilita rotujících kol

střely, vrtule

↓

rotující tělesa vzniká moment na rot. těl.

→ vymizí, pokud rot. osa ... směr

Rotující těl.: a) zapnutí $M^E \neq 0$ → setrvačník se vychýlí o $\Delta\vec L$

b) vypnutí $\vec M^E = 0$ → pohyb se zastaví – zůstane v nové pozici

Nerotující těl.: i po vypnutí $\vec M^E$/ těl. bude pokračovat v rotaci.