

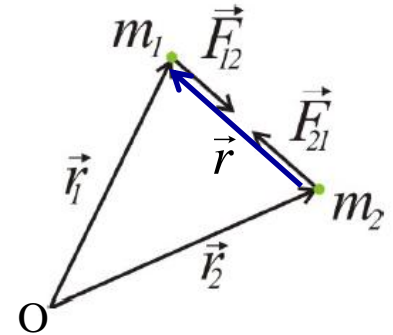
Problém dvou těles – Newtonův zákon

Pohybové rovnice:

$$\vec{F}_{12} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1$$

$$\vec{F}_{21} = m_2 \ddot{\vec{r}}_2$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$



$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{12} = \frac{1}{\mu} \vec{F}_{12} \quad \text{tedy}$$

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \mu \ddot{\vec{r}}}$$

kde $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$, $\mu \dots$ redukovaná hmotnost

Problém 2 těles převeden na problém 1 tělesa o redukované hmotnosti μ pohybující se v poli centrální síly \vec{F}_{12}

Problém dvou těles – energie, moment hybnosti

(Keplerova úloha pro pohyb izolované soustavy 2 těles)

Těžišťová s.s. (spojená s hm.středem):

$$\left. \begin{aligned} m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 &= 0 \quad (= M \vec{r}_S) \\ m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= 0 \quad (= M \vec{v}_S) \end{aligned} \right\}$$

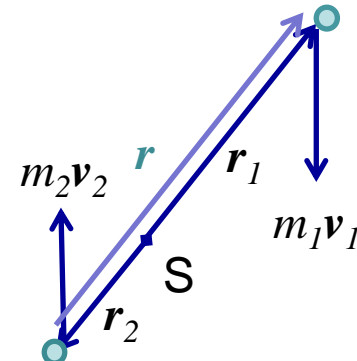
$$\left. \begin{aligned} m_1 / m_2 &= r_2 / r_1 = v_2 / v_1 \\ \vec{p}_1 &= -\vec{p}_2 \end{aligned} \right\}$$

Ozn.: $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \equiv d\vec{r}/dt$$

$$\vec{r}_1 = m_2 \vec{r} / M \quad \vec{v}_1 = m_2 \vec{v} / M$$

$$\vec{r}_2 = -m_1 \vec{r} / M \quad \vec{v}_2 = -m_1 \vec{v} / M$$



Celková energie:

$$E_0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \kappa \frac{m_1 m_2}{r} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 + E_p = \frac{1}{2} \mu v^2 + E_p \quad \text{kde} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

redukovaná hmotnost

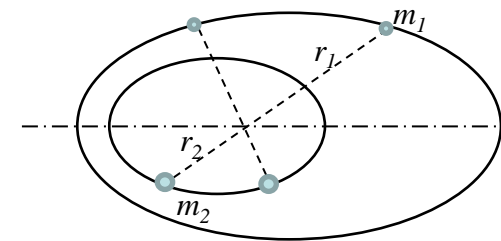
Celkový moment hybnosti:

$$\begin{aligned} \vec{L}_0 &= \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 = \vec{r} \times m_1 m_2^2 \vec{v} / M^2 + \vec{r} \times m_1^2 m_2 \vec{v} / M^2 = \vec{r} \times m_1 m_2 (m_1 + m_2) \vec{v} / M^2 = \\ &= \vec{r} \times \mu \vec{v} \end{aligned}$$

Tedy:

Relat.pohyb 2 těles podrobených vzájemnému působení je možné popsat pohybem 1 tělesa o reduk.hmotnosti μ

Pozn: většinu E_k a L nese těleso s menší hmotností



Závěr: Planety se pohybují po podobných elipsách kolem společného h.s. (těžiště)

Problém tří a více těles nemá obecné analytické řešení → numerické řešení

https://en.wikipedia.org/wiki/Three-body_problem

Rázy těles, srážky a rozptyl částic

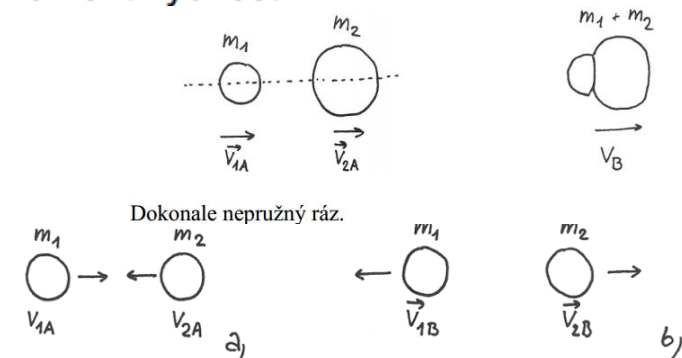
(ideálně, dokonale) **nepružný ráz** tělesa se spojí a pohybují jako jediné
(ideálně, dokonale) **pružný ráz** zachovává se celková kinetická energie
nedokonale pružný po odrazu celková kinetická energie klesne

interakční síly

- vnitřní síly soustavy těles – nemění celkovou hybnost a moment hybnosti
- nesledujeme jejich detailní průběh

zákony zachování

- **hybnosti**
- **momentu hybnosti**
- **mechanické energie** (v případě pružného rázu)
- celkem 6 resp. 7 rovnic



l.11 Pružný jednorozměrný ráz. a) situace před rázem, b) situace po rázu.

2 tělesa/částice:

3D translace a rotace - 12 velčin (ráz těles)

3D translace - 6 veličin / 4 rce (pružné srážky částic)

2D translace - 4 veličiny / 3 rce “

1D translace - 2 veličiny / 2 rce “

časový průběh síly při srážce

Nepružný ráz

3 st.volnosti – 3 rce ZZH dostačující:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}$$

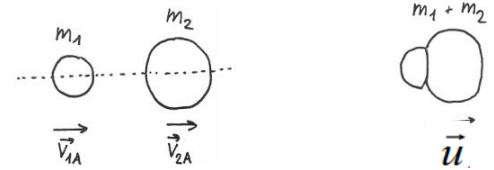
$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Energie přeměněná na vnitřní en. („teplo“)

$$E_{\text{teplo}} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = \frac{1}{2} \mu (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2},$$

Ot.: srážka automobilů



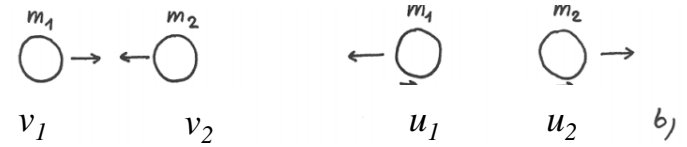
Dokonale nepružný ráz.

Pružný ráz v přímce

2 st.volnosti – 2 rce ZZH + ZZE

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$



l.11 Pružný jednorozměrný ráz. a) situace před rázem, b) situace po rázu.

rychlosti:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

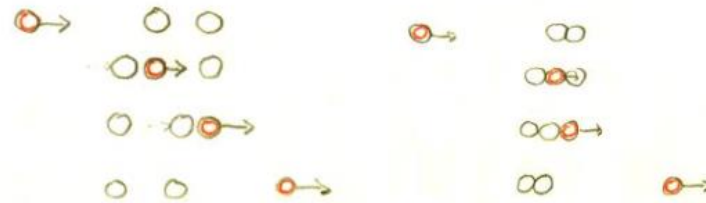
$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}$$

spec. případ1

$$m_1 = m_2 \rightarrow \begin{aligned} u_1 &= v_2 \\ u_2 &= v_1 \end{aligned}$$

spec. případ2

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 \\ v_1 &= v \\ v_2 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= v \end{aligned}$$



Pružné srážky obecně

3D: 6 st.volnosti – 4 rce: 3xZZH + 1xZZE (v rovině 2D: 4 st.volnosti – 3 rce: 2xZZH + 1xZZE)

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

Rozbor v těžišťové ss: rychlosti v TSS (s indexem c):

$$\left. \begin{matrix} m_1, \vec{v}_1 \\ m_2, \vec{v}_2 \end{matrix} \right\} \rightarrow \vec{v}_s = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_{c1} = \vec{v}_1 - \vec{v}_s \\ \vec{v}_{c2} = \vec{v}_2 - \vec{v}_s \end{cases}$$

ZZH a ZZME v těžišťové soustavě

$$\left. \begin{matrix} m_1, \vec{v}_{c1} \\ m_2, \vec{v}_{c2} \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{cases} m_1 \vec{v}_{c1} + m_2 \vec{v}_{c2} = 0 = m_1 \vec{u}_{c1} + m_2 \vec{u}_{c2} \\ \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{c1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_{c2}^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{u}_{c1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{u}_{c2}^2 \end{cases}$$

Pro hybnosti:

(p před interakcí
h po interakci)

$$\vec{p}_{c1} = m_1 \vec{v}_{c1}$$

$$\vec{p}_{c2} = m_2 \vec{v}_{c2}$$

$$\vec{h}_{c1} = m_1 \vec{u}_{c1}$$

$$\vec{h}_{c2} = m_2 \vec{u}_{c2}$$

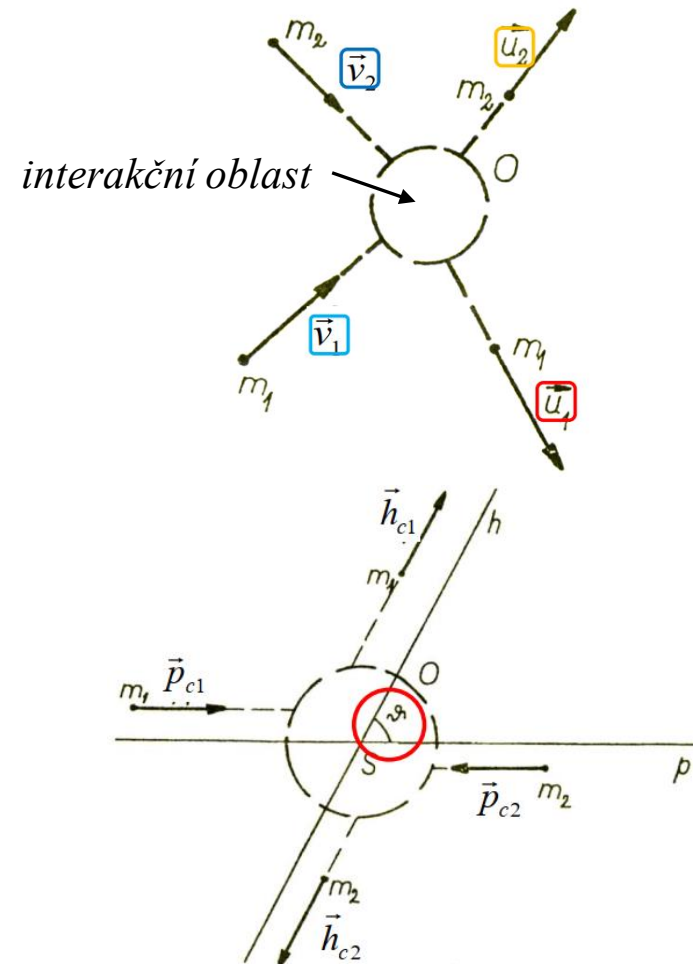
$$\boxed{\begin{matrix} \vec{p}_{c1} = -\vec{p}_{c2} \\ \vec{h}_{c1} = -\vec{h}_{c2} \end{matrix}}$$

$$\text{ZZE: } \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_{c1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2} \vec{v}_{c1}^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{u}_{c1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2} \vec{u}_{c1}^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \vec{v}_{c1}^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \vec{u}_{c1}^2 \quad \rightarrow |\vec{v}_{c1}| = |\vec{u}_{c1}|$$

analogicky

$$\rightarrow |\vec{v}_{c2}| = |\vec{u}_{c2}|$$



- každá z částic se pohybuje před i po srážce stejně velkou rychlostí
- částice se pohybují po společných přímkách

Pružné srážky v TSS

velikosti a směry rychlostí v t.s.s. vzájemně svázány

- každá z částic se pohybuje před i po srážce stejně velkou rychlostí
- částice se pohybují po společných přímkách před srážkou k sobě, po srážce od sebe

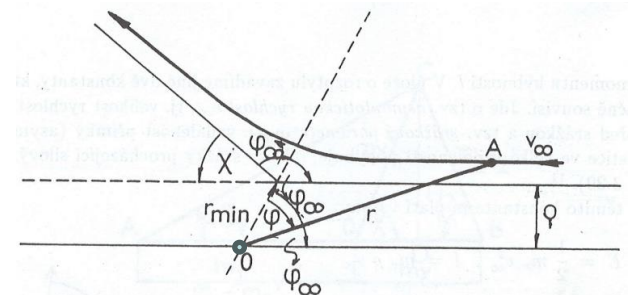
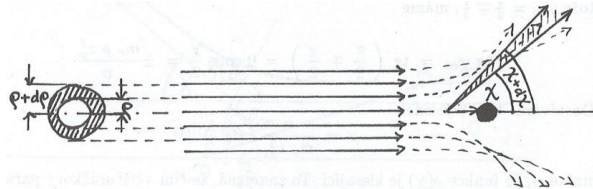
zbývají přesto ještě dva úhly, k jejichž určení jsou nutné další informace

- jednou z nich může být **zachování roviny pohybu** určené výchozí hodnotou momentu hybnosti v původní s.s. (např. centrální síly, viz gravitace 2.KZ)
- je-li určena rovina, zbývá jediný parametr – úhel ϑ

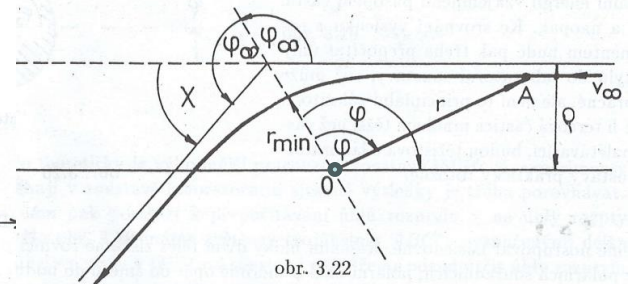
Pružný rozptyl částic na centru:

- rozptyl na tvrdé kuličce (izotropní rozptyl)
- rozptyl v coulombovském / newtonovském poli -
Rutherfordův rozptyl:

$$d\sigma = \frac{1}{4} \left(\frac{Ze^2}{E} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}$$



obr. 3.21



obr. 3.22

Pozn. Laboratorní ss ...

Rázy, srážky těles

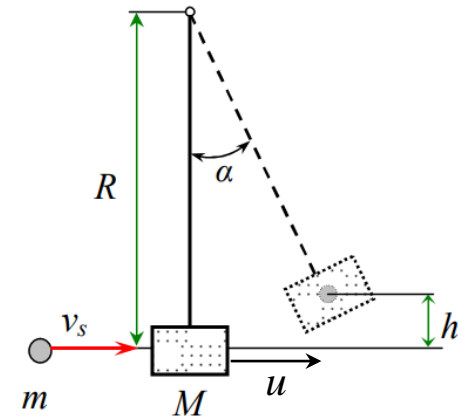
Př.: balistické kyvadlo – měření rychlosti střely

a) střela uvízne v krabici

$$\text{ZZH: } mv = (m + M)u$$

$$\text{ZZE: } \frac{1}{2}(m + M)u^2 = (m + M)gh$$

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh}, \quad \text{kde } h = R(1 - \cos \alpha)$$



Dom.cv.:

b) Jaká část kin.energie se přemění na „teplo“

$$\left(\frac{E_{\text{poč}}}{E_{\text{poč}} - E_{\text{konc}}} = \frac{M}{m + M} \right)$$

c) Střela po nárazu odskočí zpět rychlostí v_0

$$\left(v = \frac{M}{m} \sqrt{2gh} - v_0 \right)$$

d) Střela po nárazu ztratí rychlost a spadne dolů?

$$\left(v = \frac{M}{m} \sqrt{2gh} \right)$$

Soustavy s proměnnou hmotností

Izolovaná soustava s hmotností M a rychlostí \mathbf{v}

během času dt se oddělí část $dM < 0$ s rychlostí \mathbf{v}_1 (spaliny m raketového motoru $dm = -dM$)

$$\text{ZZH: } \underbrace{M\mathbf{v}}_{\vec{P}_1} = \underbrace{(M + dM)(\mathbf{v} + d\mathbf{v})}_{\vec{P}_2} - \underbrace{\mathbf{v}_1 dM}_{\text{plyny}}$$

(zanedb. členu 2. řádu $dM \cdot d\mathbf{v}$)

$$M d\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) dM \quad (*)$$

kde $(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) = \vec{u}$
je relat. rychlost spalin

Tedy změny M a rychlosti \mathbf{v} během časového intervalu dt :

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \vec{u} \frac{dM}{dt}$$

kde $d\mathbf{v}/dt = \vec{a}$ je zrychlení rakety, $\vec{u} = (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})$ je relat. rychlost spalin,

Pokud působí vnější síly (gravitace, odpor prostředí...):

$$\boxed{M\vec{a} = \vec{u} \frac{dM}{dt} + F^E}$$

rce Meščerského, $\vec{u} \frac{dM}{dt}$... reaktivní (tažná) síla rakety

Pozn: $dM < 0$, tedy u a a mají opačný směr;

- hmota rakety M ubývá \rightarrow zrychlení rakety roste (neb pravá strana Meščerského rce je konstantní)

- platí i pro opačnou úlohu: narůstání hmotnosti $dM > 0$, např. kapka nabírá vlhkost při pádu

Výsledná rychlost (změna rychlosti) rakety - integrací (*):

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = -u \int_{M_0}^{M_k} \frac{dM}{M}$$

$$\boxed{\Delta v = u \ln \frac{M_0}{M_k}}$$

rce Ciolkovského – výsledná rychlost rakety závisí jen na poměru hmotnosti na začátku a na konci a na relat. rychlosti plynů u