4. Soustava hmotných bodů a tuhé těleso

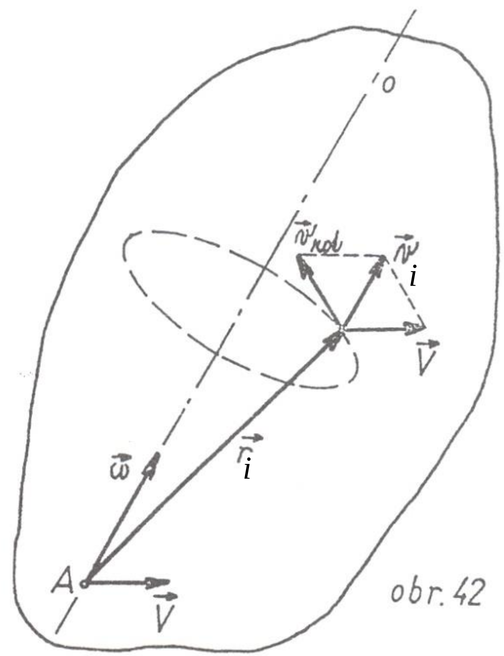
Anotace:

Popis soustavy, stupeň volnosti. Kinematika tuhého tělesa. Věty o hybnosti a momentu hybnosti soustavy - 1. a 2. věta impulsová. Věty o zachování hybnosti a momentu hybnosti. Energie soustavy hmotných bodů, Königova věta. Zjednodušení soustav sil působících na tuhé těleso.

N hmotných bodů / tuhé těleso

Popis:

- hmotnosti m_i, $i = 1 \dots N$
- polohové vektory $\boldsymbol{r}_i(t)$, $i = 1 \dots N$
- celková hmotnost soustavy: $M = \sum m_i$
- popř. rozložení hmotnosti $\rho(\boldsymbol{r})$



S.h.b. – základní pojmy

N hmotných bodů
Popis – hmotnosti m_i, polohové vektory $\boldsymbol{r}_i(t)$, $i = 1 \dots N$

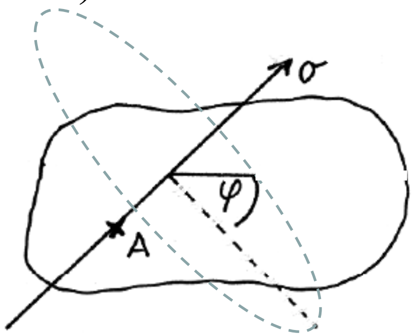
- **Stupeň volnosti** – počet nezávislých parametrů

- **Volná soustava** - 3N *stupňů volnosti*

- **Tuhá soustava**, **tuhé těleso** (neproměnné vzdálenosti) – 6 stupňů volnosti
  určena 3 h.b. $\boldsymbol{r}_\mathrm{i}$, $\boldsymbol{r}_\mathrm{j}$, $\boldsymbol{r}_\mathrm{k}$ neležící v přímce, jejichž vzdálenosti jsou pevně dány:

  $$d_{kl} = \left|\vec{r}_k - \vec{r}_l\right|, \; d_{km} = \left|\vec{r}_k - \vec{r}_m\right|, \; d_{lm} = \left|\vec{r}_l - \vec{r}_m\right|$$

- Popis tuhé s.h.b. – lépe: udání polohy jednoho bodu (3 souřadnice), osy O procházející tímto bodem (2 parametry - úhly) a natočení tělesa kolem této osy (1 úhel)



- Tuhé těleso – spojité rozložení hmoty, nedeformovatelné

$$\rho = \rho\left(\vec{r}\right) \neq 0 \qquad \text{v limitě: } \rho = \lim_{V \to 0} \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV} \qquad \text{hmotnost: } m = \int \rho\left(\vec{r}\right) dV$$

S.h.b. – základní pojmy

Problémy, kt. budeme řešit:

- Posuvy soustavy
- Rotace soustavy

Hmotný střed:
(vážený průměr, váhy m_i)

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_1^N m_i \vec{r}_i}{\sum_1^N m_i} = \frac{1}{M}\sum_1^N m_i \vec{r}_i \quad \rightarrow$$

$$\frac{1}{M}\int_m \vec{r}\, dm = \frac{1}{M}\int_V \rho(\vec{r})\vec{r}\, dV$$

Rychlost a zrychlení h.s.:

$$\vec{v}_S = \frac{1}{M}\sum_1^N m_i \vec{v}_i \qquad \vec{a}_S = \frac{1}{M}\sum_1^N m_i \vec{a}_i$$

Celková hybnost s.h.b.:

$$\vec{P} = \sum_1^N m_i \vec{v}_i \quad \text{tedy} \quad \vec{P} = M\vec{v}_S$$

tj. rovná se hybnosti h.b. o hmotnosti M a rychlosti $\vec{v}_S$

Kinematika tuhé soustavy

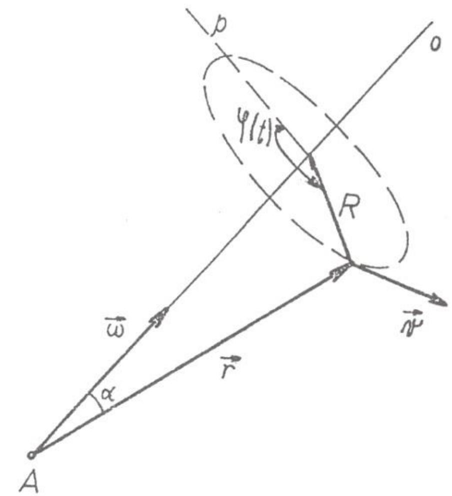
Parametrický popis pohybu: $\boldsymbol{r}_\mathrm{i} = \boldsymbol{r}_\mathrm{i}(\mathrm{t})$ $x^k{}_i = x^k{}_i(\mathrm{t})$, $k = 1..3$ (souřadnice), $i = 1..N$ (počet bodů)

$3N$ pohybových rovnic: $\vec{F}_i = m_i \dfrac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$, kde $\vec{F}_i = \sum\limits_{j=1..N} \vec{F}_{ij}^{\,\mathrm{int}} + \vec{F}_i^{\,ext}$ $i = 1..N$

kde *int* - interní a *ext* - externí síly

- nevhodné pro praktické použití,
- budeme hledat obecná pravidla pro pohyb s.h.b./t.t.

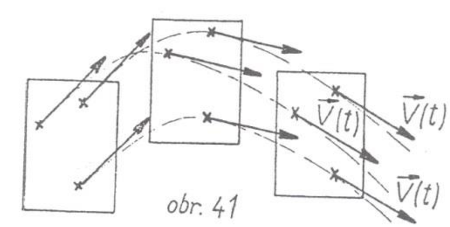
Poloha 1 bodu, osy procházející tímto bodem a orientace této osy



obr. 40

➢ Rotace <u>kolem pevné osy</u>:
bod A a osa – stálá poloha → 1 parametr: $d\varphi/dt = \omega(t)$, ω stejná ∀ body soustavy, rychlost lib.bodu $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$

➢ Rotace <u>kolem pevného bodu</u>:
bod A pevný, osa mění směr - **v každém okamžiku lze otáčení t.t. rozložit na rotaci kol pevné osy procházející pevným bodem, avšak v průběhu času se mění jak směr osy tak i ω = ω(*t*).**



obr. 41

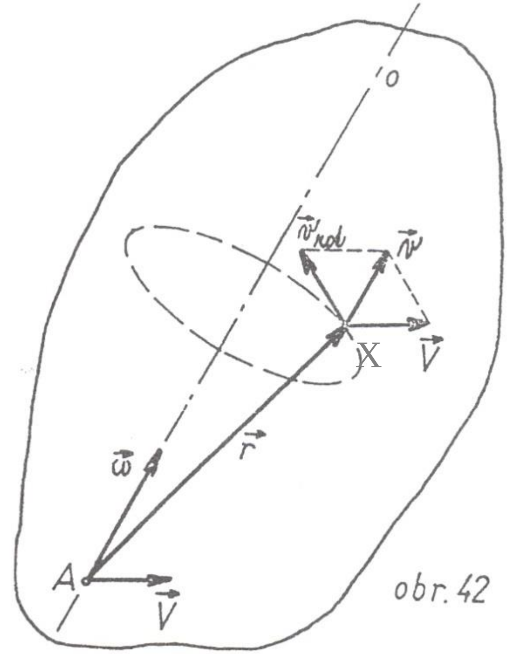
➢ Translace (postupný, posuvný pohyb)

➢ Translace + rotace kolem 1 a více os, obr…

Kinematika tuhé soustavy

Obecný pohyb t.t.

Chaslesova věta: libovolný pohyb t.t. lze složit z posuvného pohybu a rotace kolem pevného bodu (bod *A* na obr.)



$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{V}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}}$$ (základní rovnice kinematiky t.t.)

Ot.: jak závisí rychlost ***v*** bodě X na volbě bodu referenčního bodu A?
Zvolíme další bod A':

$$\vec{v}(t) = \vec{V}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r} \qquad (\omega \text{ - rotace vůči A}) \qquad (*)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{V}'(t) + \vec{\omega}'(t) \times \vec{r}' \qquad (\omega' \text{ - rotace vůči A'}) \qquad (**)$$

potom též

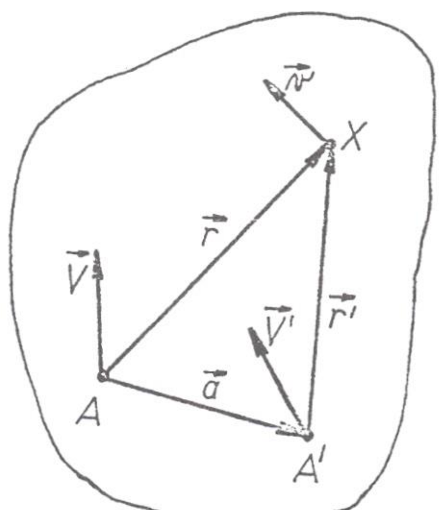
$$\vec{V}'(t) = \vec{V}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{a} \qquad (\text{rychlost A}' \text{ vůči A})$$

$$(*) \rightarrow \vec{v}(t) = \vec{V}'(t) - \vec{\omega}(t) \times \vec{a} + \vec{\omega}(t) \times \vec{r} = \vec{V}'(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{r} - \vec{a}) =$$

$$\vec{v}(t) = \vec{V}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}' \qquad (\text{což je rotace vůči A'}) \qquad (***)$$

(**) a (***) $\Rightarrow$ **ω = ω'**

tj. úhlová rychlost nezávisí na referenčním bodu A



obr. 43

Kinematika tuhé soustavy

Úkol dynamiky t.t. – určit časový průběh průběhu $\boldsymbol{V}(t)$ a $\boldsymbol{\omega}(t)$ a určit trajektorii $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})$

Základní rovnice kinematiky t.t. $\vec{v}(t) = \vec{V}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}$

- určuje rychlost $\boldsymbol{v}$ lib.bodu t.t. z časového průběhu $\boldsymbol{V}(t)$ a $\boldsymbol{\omega}(t)$, neurčuje však trajektorii $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})$

Základní problém:

- $\boldsymbol{r}$ stálý v prostoru $\rightarrow$ různé body tělesa
- $\boldsymbol{r}$ pevný bod tělesa $\rightarrow$ neurčitost – neznáme ho dříve, než určíme trajektorie bodů

S.h.b. – síly

Dva druhy sil (z hlediska soustavy):

1) **Vnější síly** $\boldsymbol{F}_i^E$, které mají svoje centrum mimo soustavu

2) **Vnitřní (interakční) síly** $\boldsymbol{F}_{ij}^I$, které reprezentují vzájemné působení mezi jednotlivými hmotnými body soustavy. Řídí zákonem akce a reakce

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F}_{ii} = 0$$

centrální síly

S.h.b. – hybnost, moment hybnosti

Vnitřní síly: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ tedy $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$

Platí pro všechny dvojice: $(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}) + (\vec{F}_{13} + \vec{F}_{31}) + (\vec{F}_{14} + \vec{F}_{41}) + \ldots = 0$

$$(\vec{F}_{23} + \vec{F}_{32}) + (\vec{F}_{24} + \vec{F}_{42}) + \ldots = 0$$

$$(\vec{F}_{34} + \vec{F}_{43}) + \ldots = 0$$

$$\ldots = 0$$

⇒ výslednice všech vnitřních sil $F^{I} = 0$

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i^{I} + \sum \vec{F}_i^{E} = \vec{F}^{E}$$

$$= \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum \vec{p}_i = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}^{E} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

kde $\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_S$ celková hybnost soustavy

1. věta impulsová (věta o hybnosti s.h.b., t.t.):
časová změna celkové hybnosti soustavy = výslednici vnějších sil působící na soustavu

S.h.b. – hybnost, moment hybnosti

Důsledek: $$\boxed{\vec{F}^{E} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}M\vec{v}_S = M\vec{a}_S}$$

<u>Věta o pohybu hmotného středu s.h.b.</u>: hmotný střed soustavy se pohybuje jako h.b., který má celkovou hmotnost *M* soustavy a na nějž působí výslednice vnějších sil.

<u>Zákon zachování celkové hybnosti:</u> V izolované soustavě (tj. na kterou nepůsobí žádné vnější síly, $F^E = 0$) se zachovává celková hybnost soustavy:

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = const}$$

(3 rce pro každou složku, $P_k = const$, $k = 1,2,3$)

Pozn.: těžiště – moment tíhových sil působících na soustavu:

$$\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i \xrightarrow[\text{homog.pole, g=const}]{} \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{g} = M\vec{r}_s \times \vec{g} = \vec{r}_s \times \vec{G} = 0$$

neboť **G** působí ve hmotném středu, soustava nerotuje

v homog.poli tedy těžiště ≡ hm.střed

S.h.b. – hybnost, moment hybnosti

Pozn.:

- 3 skalární rovnice pro 3 složky (rce platí pro jednotlivé složky)
- vnitřní síly nemohou ovlivnit pohyb hm.středu, $\boldsymbol{v}_S = const.$

Př.: výstřel, dělostřelecký granát, ohňostroj, pohon raket (raketa + palivo)

S.h.b. – hybnost, moment hybnosti

Moment sil

(může být nenulový i když celková $\mathbf{F}^E = 0$, viz. silová dvojice)

Vnitřní síly: F_{ij} a F_{ji} leží v přímce – mají k lib.bodu stejné rameno → jejich momenty se vzájemně ruší, tedy:

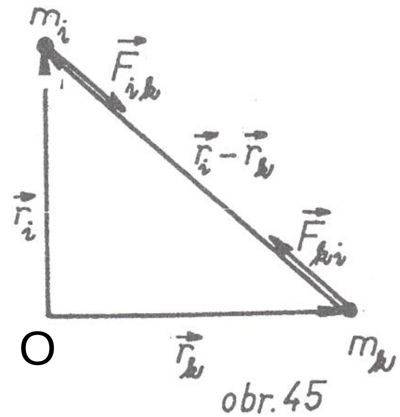
Výsledný moment vnitřních sil soustavy je vzhledem k lib.bodu prostoru nulový

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{(I)} + \vec{F}_i^{(E)}) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(I)} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(E)} = \vec{M}_i^{(I)} + \vec{M}_i^{(E)}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum \vec{M}_i^I + \sum \vec{M}_i^E = \vec{M}^E$$

$$\boxed{\vec{M}^E = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

kde $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i$ ... celk. moment hybnosti soustavy



2.Věta impulsová: Časová změna momentu hybnosti s.h.b. vzhledem k libovolnému pevnému bodu je rovna výslednému momentu vnějších sil vzhledem k témuž bodu.

S.h.b. – hybnost, moment hybnosti

matem. dk.: neboť $F_{ij} = - F_{ji}$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^I = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \sum_j \vec{F}_{ij}^I \right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^I + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}^I \right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j \right) \times \vec{F}_{ij}^I \right) = 0 \quad \| \text{ vektory}$$

Pozn.:

- II. impulsová věta je splněna také tehdy, zvolíme-li za **vztažný bod hmotný střed soustavy**, který obecně není pevný.
- Síly, které způsobují zrychlení hmotného středu, však v něm mají své působiště a jejich moment vůči němu je nulový.
- Vlastní pohyb hmotného středu nemá vliv na otáčení jednotlivých hmotných bodů kolem osy, která jím prochází.

Pozn. Moment síly M_3 ($\equiv M_z$) způsobuje pohyb v rovině 12 (tj. xy) !

S.h.b. – hybnost, moment hybnosti

Zákon zachování celkového momentu hybnosti: V izolované soustavě (tj. na kterou nepůsobí žádné vnější momenty sil, $\underline{M^{E} = 0}$) se zachovává celkový moment hybnosti soustavy

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = const}$$

(3 rce pro každou složku, $L_k = const$, $k = 1,2,3$)
(platí pro izolovanou soustavu a všechny druh sil)

Př.:
pohyb v centrálním poli (2.Kepplerův z.)
elektrony v atomu (elektron. slupky)
sluneční soustava - stabilita, tvary galaxií

Experimenty: těleso pohybující se po rotující desce, cvičení s činkami a s bicyklovým kolem na točně - viz kap. 5

S.h.b. – hybnost, moment hybnosti

Shrnutí – vlastnosti:

- **obě impulsové věty <u>platí zcela obecně</u> pro libovolnou s.h.b. (tuhou i volnou), pro libovolný druh sil, i mimo Newtonovskou mechaniku (relativistické rychlosti, kvantová mechanika)**
- vnitřní síly nemohou ovlivnit pohyb hm.středu, $\boldsymbol{v}_S$ = *const*., nemohou změnit hybnost ani moment hybnosti soustavy
- 6 skalárních rovnic – úplný systém určující pohyb tuhé s.h.b. nebo t.t. - určují 6 funkcí, např. $\mathbf{V}(t)$ a $\boldsymbol{\omega}(t)$
- Izolovaná soustava (tj. nepůsobí vnější síly nebo je jejich výslednice nulová, $\boldsymbol{F}^{E} = 0$): platí ZZH, ZZMH

Energie s.h.b.

Celková K.E. soustavy: $$E_k = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Ot.: zachovává se K.E. pokud vnější síly jsou nulové? Mohou vnitřní síly měnit K.E?

Práce: $$W = \sum_{1}^{N} \int \vec{F}_i d\vec{s}_i = \sum \frac{1}{2} m_i \left(\left(v_i^B \right)^2 - \left(v_i^A \right)^2 \right) = E_k^B - E_k^A$$

(viz věta o přírůstku K.E. h.b.)

Práce vykonaná všemi <u>vnějšími i vnitřními</u> silami na s.h.b. = přírůstku K.E. soustavy

Pozn.
Vnitřní síly konají práci jen u volné soustavy
Př.: pružina, expanze plynu, raketa, výstřel… (autíčko na setrvačník, elektromobil) … volné soustavy

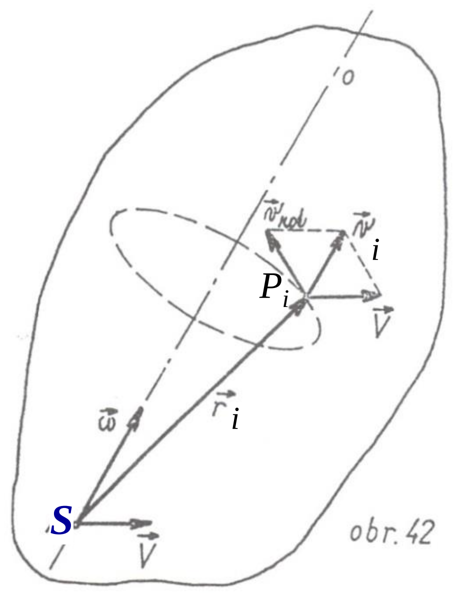
Jsou-li vnější i vnitřní síly působící na t.t. konzervativní, je součet P.E. tělesa ve vnějším poli a jeho K.E. konstantní - zákon zachování mechanické energie

Energie s.h.b.

Rozklad K.E. soustavy: (referenční bod = hmotný střed)

$$\vec{v}_i = \vec{V}_S + \vec{v}_i^S \quad \vec{V}_S - \text{rychlost hm.středu} \quad \vec{v}_i^S - \text{ rychlost h.b. vůči hm.středu}$$

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i \left(\vec{V}_S + \vec{v}_i^S\right)^2 = \frac{1}{2} M\vec{V}_S^{\,2} + \vec{V}_S \underbrace{\sum m_i \vec{v}_i^S}_{0} + \frac{1}{2}\sum m_i \left(\vec{v}_i^S\right)^2$$



$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} M V_S^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \left(v_i^S\right)^2}$$

<u>Věta o rozkladu K.E. (Königova věta)</u>: K.E. s.h.b. (t.t.) se skládá z K.E. bodu o hmotnosti rovné celkové hmotnosti soustavy s rychlostí V_S hmotného středu soustavy (těžiště) + kinetické energie pohybu všech h.b. vůči jejímu hm.středu.

2. člen se nazývá vnitřní K.E. soustavy

Energie s.h.b.

Zvláštní případy:

a) t.t. se otáčí <u>kolem **pevné** osy</u> (referenční bod = libovolný bod na ose otáčení)

K.E. rotačního pohybu:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

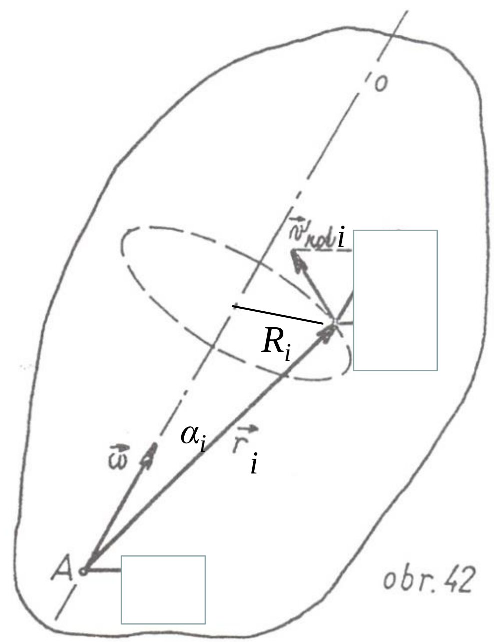
$$E_k^{rot} = \frac{1}{2}\sum m_i \left(\vec{v}_i\right)^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum m_i \omega^2 r_i^2 \sin^2 \alpha_i = \frac{1}{2}\sum m_i \omega^2 R_i^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum m_i R_i^2$$

$$\boxed{J^o = \sum m_i R_i^2 \qquad J^o = \int R^2 dm = \int R^2 \rho dV}$$

def. momentu setrvačnosti J^O tělesa vůči lib. <u>pevné</u> ose

R_i – vzdálenost od osy,

J závisí na rozložení hmoty



Kinetická energie – otáčení kol pevné osy:

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} J^o \omega^2}$$

Energie s.h.b.

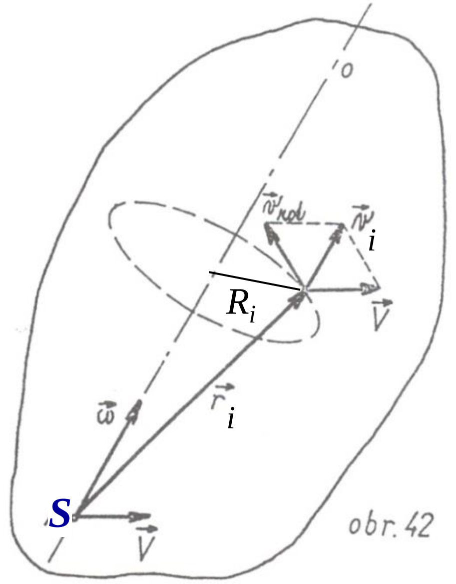
b) Obecný posuvný a rotační pohyb (osa rotace prochází hm.středem)

$\vec{v}_i = \vec{V}_S + \vec{v}_i^{\,S}$ kde $\vec{v}_i^{\,S} = \vec{\omega} \times \vec{r}_i^{\,s}$ je rychlost vůči hm.středu (= ref.bod)

$$E_k^{rot} = \frac{1}{2}\sum m_i \left(\vec{v}_i^{\,S}\right)^2 = \sum \frac{1}{2} m_i \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i^{\,s}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum m_i \omega^2 r_i^{(s)2} \sin^2 \alpha_i = \frac{1}{2}\sum m_i \omega^2 R_i^2$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} M V_S^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2}$$

… rozklad K.E. (Königova věta) pro tuhé těleso

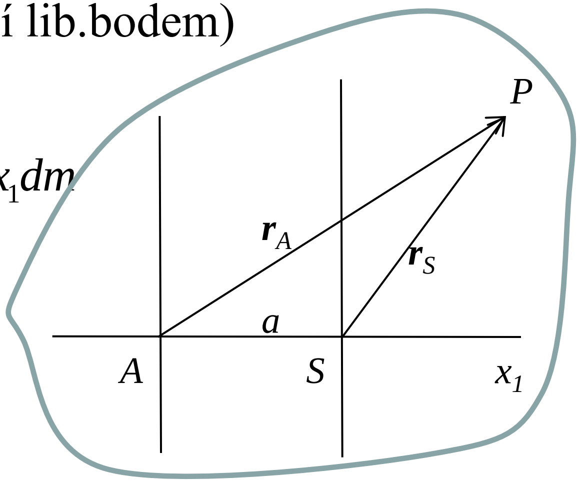


M - celková hmotnost,
J_S - moment setrvačnosti vůči ose procházející hm.středem

Věta: libovolný pohyb t.t. lze rozložit na ∞ malé přímočaré translace + rotace kolem okamžité osy otáčení procházející lib.bodem v tělese

Energie s.h.b.

Vztah mezi J_S (vůči ose jdoucí hm.středem) a J (vůči || ose jdoucí lib.bodem)



$$J_A = \int r_A^2 dm = \int \left((a + x_1)^2 + x_2^2 + x_3^2 \right) dm = \int a^2 dm + \int \sum_1^3 x_i^2 dm + \int 2 a x_1 dm$$

$$= Ma^2 + \int r_s^2 dm + 2aM \underbrace{x_1^{(s)}}_{0}$$

$$\boxed{J_A = J_S + M a^2}$$ **Steinerova věta**

Pozn. J_S je minimální (tj. mom.set. vůči ose jdoucí hm.středem)

Shrnutí

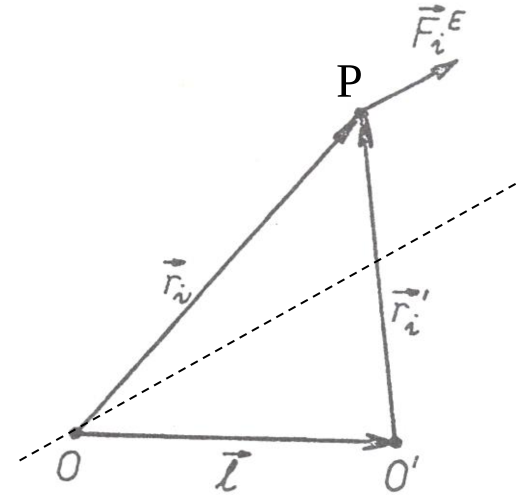
Zákony zachování - pokud nepůsobí vnější síly (izolované soustavy):

- Z.Z. celkové hybnosti soustavy
- Z.Z. celkového momentu hybnosti soustavy
- Z.Z. celkové energie (jen pro t.t.)

- 2 vektorové + 1 skalární rce – celkem 7 mechanických veličin v 3D prostoru (energie, 3 složky hybnosti a 3 složky momentu hybnosti)
- V rovině 4 mech.veličiny (E, p_1, p_2, L_3)
- Obsahují jen 1. derivace souřadnic - rychlosti (× Newtonovým pohyb.rcím) tzv. první integrály pohybu

Statika - zjednodušení soustav sil

Dynamicky ekvivalentní soustavy sil – různé síly se stejnou výslednicí sil $\boldsymbol{F^E}$ i momentů sil $\boldsymbol{M^E}$



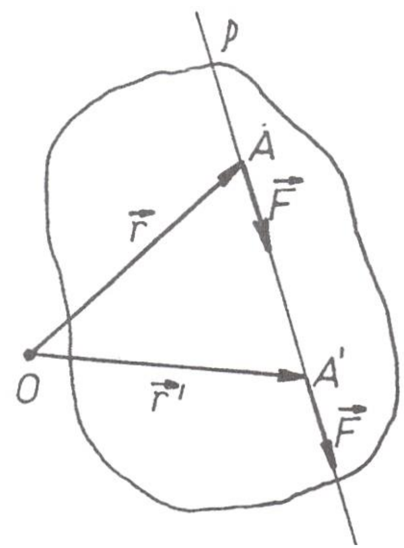
a) Volba referenčního bodu

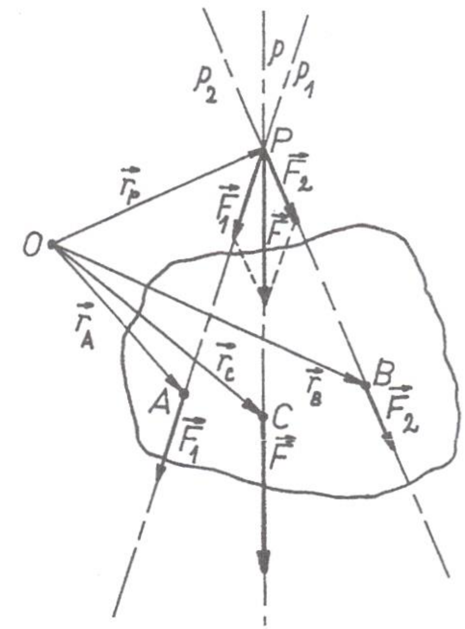
$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{l} \qquad \vec{M}^E = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^E$$

$$\vec{M}'^E = \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^E = \vec{M}^E - \vec{l} \times \vec{F}^E$$

- Pokud $\boldsymbol{F^E} = 0$ potom $\boldsymbol{M^E = M'^{\,E}}$ (tj. nezávisí na volbě ref. bodu)
- Pokud $\boldsymbol{l} \parallel \boldsymbol{F^E}$ potom $\boldsymbol{M^E = M'^{\,E}}$ "

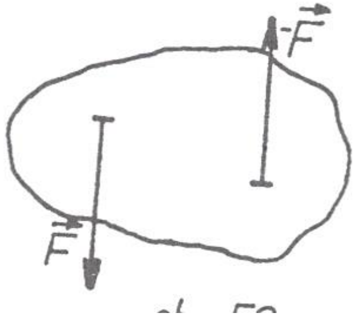
b) Přenesení působiště síly – podél přímky *p*
rovněž $\boldsymbol{M^E = M'^{\,E}}$

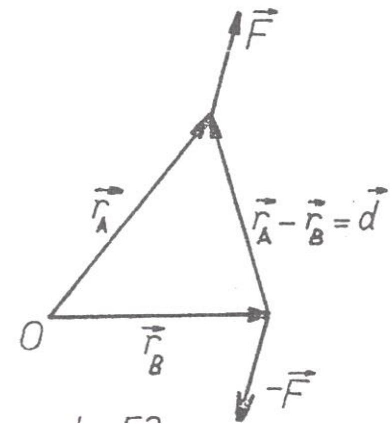




Zjednodušení soustav sil

c) Dvojice sil – stejné, antiparalelní, ***F* + (-*F*) = 0**



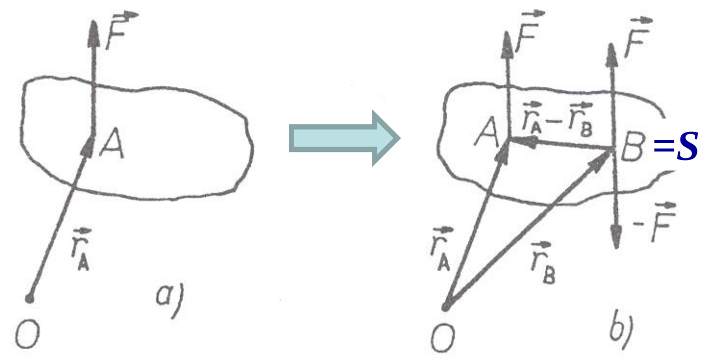


$$\vec{F} + (-\vec{F}) = 0 \quad avšak$$

$$\vec{M}^{A} + \vec{M}^{B} = \vec{r}^{A} \times \vec{F} + \vec{r}^{B} \times (-\vec{F}) = \vec{d} \times \vec{F} \neq 0$$

Moment dvojice sil –
volný vektor nezávisí na volbě ref.bodu, lze ho přenést do lib.bodu t.t.

d) Přenesení působiště do hm.středu – všechny síly působící na těleso lze přenést do hm.středu (těžiště), je třeba připojit moment výsledné dvojice



$$\vec{M}^{A} = \vec{r}^{A} \times \vec{F} = \vec{r}^{B} \times \vec{F} + \left(\vec{r}^{A} - \vec{r}^{B}\right) \times \vec{F} = \vec{r}^{B} \times \vec{F} + \vec{d} \times \vec{F} = \vec{M}^{B} + \vec{d} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_{S}^{E} = \vec{M}^{E} - \vec{r}_{S} \times \vec{F}^{E}$$

Moment hybnosti, moment síly

Pozn. Pohyb hm.středu určen celkovou vnější silou

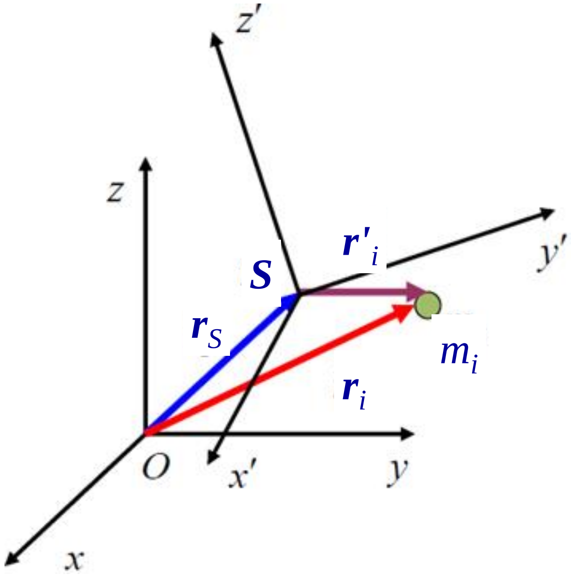
Přenesu-li působiště do hm.středu, vztahy pro ***L, M*** ?

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_S \qquad \vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_S$$

$$\vec{L} = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum [m_i (\vec{r}_i' + \vec{r}_S) \times (\vec{v}_i' \times \vec{v}_S)] = \ldots$$

$$= \sum m_i \vec{r}_S \times \vec{v}_S + \sum m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_i' + \vec{r}_S \times \underbrace{\sum m_i \vec{v}_i'}_{0} + \underbrace{\sum m_i \vec{r}_i'}_{0} \times \vec{v}_S$$

$$\vec{L} = \vec{L}_S + \vec{L}'$$



L můžeme rozdělit na část pocházející od hm.středu (těžiště)
+ část pocházející od všech částic vzhledem k hm. středu

Rovnováha těles

Výsledná síla $\boldsymbol{F^E} = 0$
Výsledný moment sil $\boldsymbol{M^E} = 0$

Pozn.1 Těleso je v rovnováze, ale nemusí být v klidu, může se dokonce otáčet
Pozn.2 Aby těleso bylo v klidu vůči s.s. musí být podrobeno vazbám

Př. rovnováha na žebříku – řešení viz přednáška