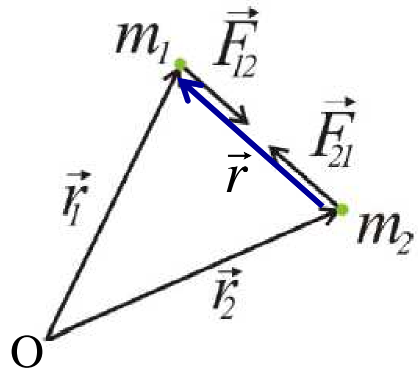
Problém dvou těles a Newtonův zákon

Pohybové rovnice:



$$\vec{F}_{12} = m_1\ddot{\vec{r}}_1$$
$$\vec{F}_{21} = m_2\ddot{\vec{r}}_2$$
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12} = \frac{1}{\mu}\vec{F}_{12} \qquad \text{tedy} \qquad \boxed{\vec{F}_{12} = \mu\,\ddot{\vec{r}}}$$

kde $\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}$, $\quad$ μ … *redukovaná hmotnost*

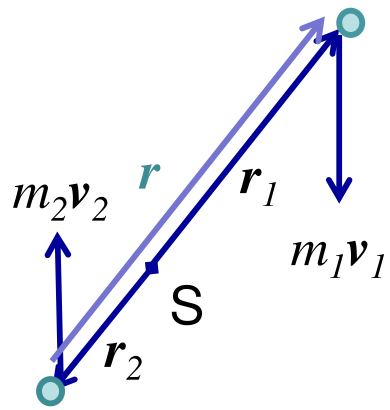
Problém 2 těles převeden na problém 1 tělesa o redukované hmotnosti μ pohybující se v poli centrální síly $\boldsymbol{F}_{12}$

Problém dvou těles – energie, moment hybnosti

(Keplerova úloha pro pohyb izolované soustavy 2 těles)

Těžišťová s.s. (spojená s hm.středem):

$$\left.\begin{aligned} m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 &= 0 \quad (= M\vec{r}_S) \\ \underline{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0} &\quad (= M\vec{v}_S) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} m_1/m_2 = r_2/r_1 \quad &= v_2/v_1 \\ \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 & \end{aligned}}$$



Ozn.:
$$\left.\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{v} &= d\vec{r}/dt = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{r}_1 &= m_2\vec{r}/M \qquad & \vec{v}_1 &= m_2\vec{v}/M \\ \vec{r}_2 &= -m_1\vec{r}/M \qquad & \vec{v}_2 &= -m_1\vec{v}/M \end{aligned}$$

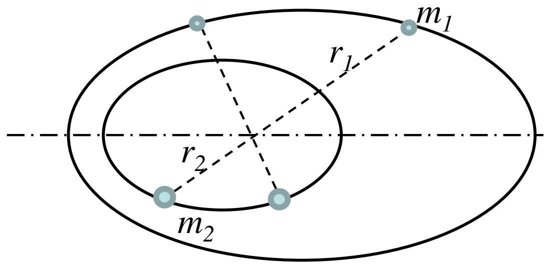
Celková energie:

$$E_0 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \kappa\frac{m_1m_2}{r} = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v^2 + E_p = \underline{\frac{1}{2}\mu v^2 + E_p} \qquad \text{kde} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

redukovaná hmotnost

Celkový moment hybnosti:

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2 = \vec{r} \times m_1m_2^2\vec{v}/M^2 + \vec{r} \times m_1^2m_2\vec{v}/M^2 = \vec{r} \times m_1m_2(m_1+m_2)\vec{v}/M^2 =$$
$$= \underline{\vec{r} \times \mu\vec{v}}$$



Tedy:
Relat.pohyb 2 těles podrobených vzájemnému působení je možné popsat pohybem 1 tělesa o reduk.hmotnosti μ
Pozn: většinu E_k a L nese těleso s menší hmotností
Závěr: Planety se pohybují po podobných *elipsách kolem společného h.s. (těžiště)*

Problém tří a více těles nemá obecné analytické řešení → numerické řešení

https://en.wikipedia.org/wiki/Three-body_problem

Rázy těles, srážky a rozptyl částic

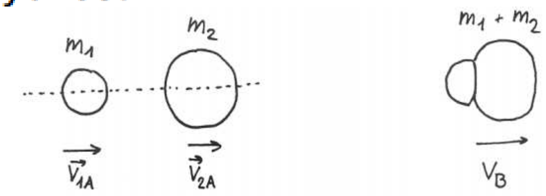
(ideálně, dokonale) **nepružný ráz** tělesa se spojí a pohybují jako jediné
(ideálně, dokonale) **pružný ráz** zachovává se celková kinetická energie
nedokonale pružný po odrazu celková kinetická energie
klesne

interakční síly

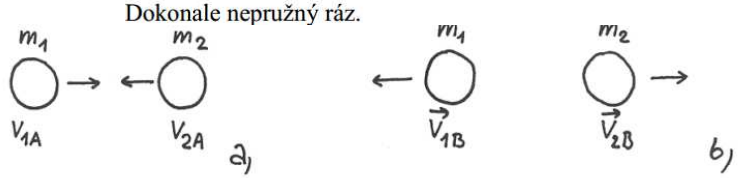
- vnitřní síly soustavy těles – nemění celkovou hybnost a moment hybnosti
- nesledujeme jejich detailní průběh

zákony zachování

- **hybnosti**
- **momentu hybnosti**
- **mechanické energie** (v případě pružného rázu)
- celkem 6 resp. 7 rovnic

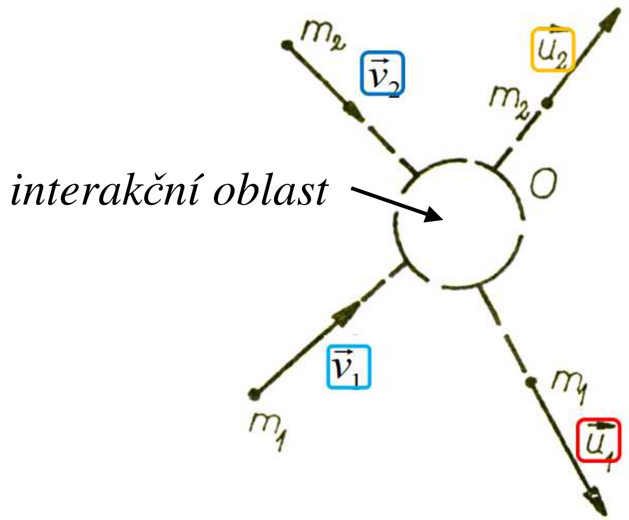


Dokonale nepružný ráz.



1.11 Pružný jednorozměrný ráz. a) situace před rázem, b) situace po rázu.

2 tělesa/částice:
3D translace a rotace - 12 velčin (ráz těles)
3D translace - 6 veličin / 4 rce (pružné srážky částic)
2D translace - 4 veličiny / 3 rce “
1D translace - 2 veličiny / 2 rce “



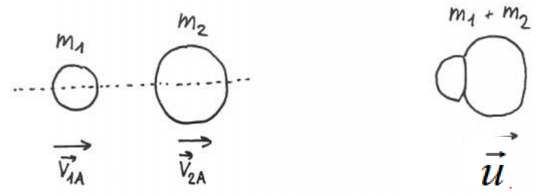
časový průběh síly při srážce

Nepružný ráz

3 st.volnosti – 3 rce ZZH dostačující:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$$

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$



Dokonale nepružný ráz.

Př.: vypočti ztrátu K.E.při nepružném rázu, tj. en. přeměněnou na vnitřní en. („teplo“):

Ř.: $$E_{\text{teplo}} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = \frac{1}{2}\mu(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2},$$

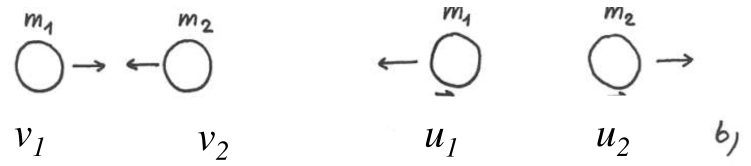
Ot.: srážka automobilů

Pružný ráz v přímce

2 st.volnosti – 2 rce ZZH + ZZE

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$



.11 Pružný jednorozměrný ráz. a) situace před rázem, b) situace po rázu.

rychlosti:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$u_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}$$

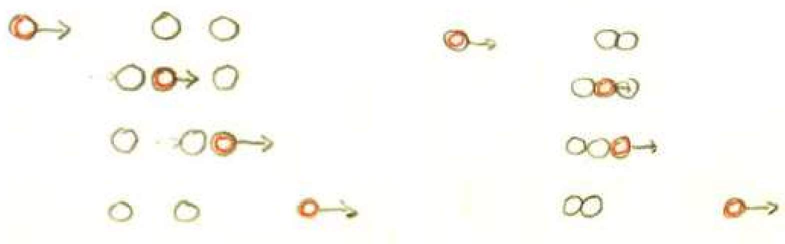
úkol: ukažte, že platí:

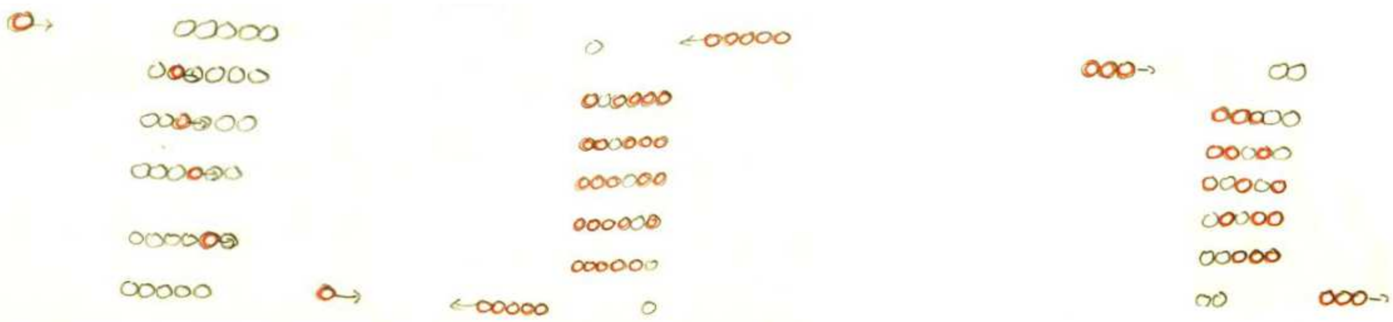
$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2$$

$$v_1 - v_2 = -(u_1 - u_2)$$ ... relat.rychlosti částic se zachovávají

spec. případ:

$$m_1 = m_2 \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} u_1 = v_2 \\ u_2 = v_1 \end{matrix}$$ … částice si vymění rychlosti



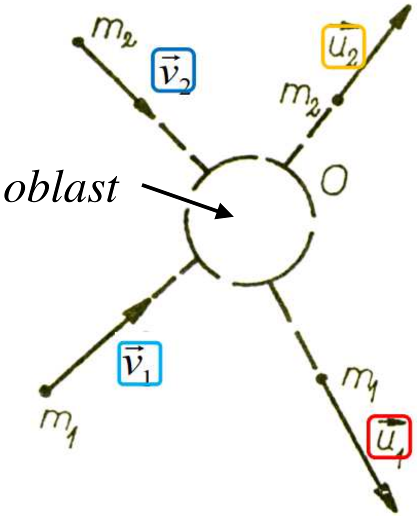


Pružné srážky obecně

3D: 6 st.volnosti – 4 rce: 3xZZH + 1xZZE (v rovině 2D: 4 st.volnosti – 3 rce: 2xZZH + 1xZZE)

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$



Rozbor v **<u>těžišťové ss</u>**: rychlosti v TSS (s <u>indexem *c*</u>):

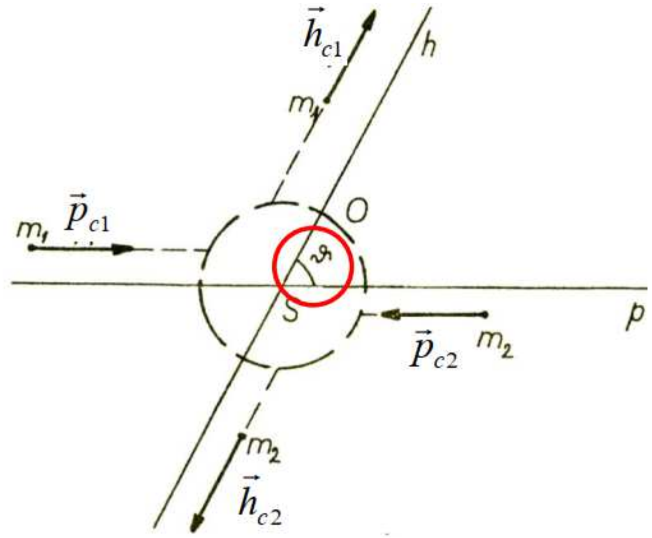
$$\left.\begin{array}{l} m_1, \vec{v}_1 \\ m_2, \vec{v}_2 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_s = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{v}_{c1} = \vec{v}_1 - \vec{v}_s \\ \vec{v}_{c2} = \vec{v}_2 - \vec{v}_s \end{array}\right.$$

ZZH a ZZME v těžišťové soustavě

$$\left.\begin{array}{l} m_1, \vec{v}_{c1} \\ m_2, \vec{v}_{c2} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} m_1\vec{v}_{c1} + m_2\vec{v}_{c2} = 0 = m_1\vec{u}_{c1} + m_2\vec{u}_{c2} \\ \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{c1}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{c2}^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{u}_{c1}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{u}_{c2}^2 \end{array}\right.$$

Pro <u>hybnosti</u>:
(p je hybnost před interakcí, h po interakci)

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p}_{c1} = m_1\vec{v}_{c1} \\ \vec{p}_{c2} = m_2\vec{v}_{c2} \\ \vec{h}_{c1} = m_1\vec{u}_{c1} \\ \vec{h}_{c2} = m_2\vec{u}_{c2} \end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} \vec{p}_{c1} = -\vec{p}_{c2} \\ \vec{h}_{c1} = -\vec{h}_{c2} \end{array}}$$



ZZE: $$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_{c1}^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2}{m_2^2}\vec{v}_{c1}^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{u}_{c1}^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2}{m_2^2}\vec{u}_{c1}^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}m_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\vec{v}_{c1}^2 = \frac{1}{2}m_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\vec{u}_{c1}^2 \qquad \rightarrow |\vec{v}_{c1}| = |\vec{u}_{c1}|$$

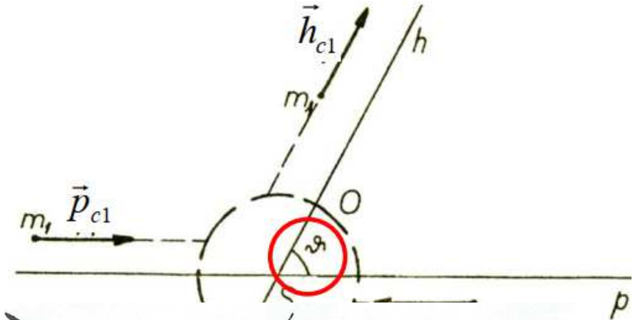
analogicky $$\rightarrow |\vec{v}_{c2}| = |\vec{u}_{c2}|$$

- každá z částic se pohybuje před i po srážce stejně velkou rychlostí
- částice se pohybují po společných přímkách

Pružné srážky v TSS

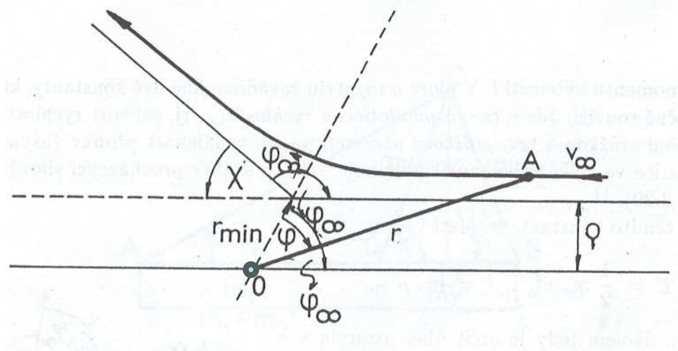
velikosti a směry rychlostí v t.s.s. vzájemně svázány
- každá z částic se pohybuje před i po srážce se stejně velkou hybností
- částice se pohybují po společných přímkách před srážkou k sobě, po srážce od sebe

zbývají ještě dva úhly, k jejichž určení jsou nutné další informace
- jednou z nich může být **zachování roviny pohybu** určené výchozí hodnotou momentu hybnosti v původní s.s. (např. centrální síly, viz gravitace 2.KZ)
- je-li určena rovina, zbývá jediný parametr – úhel ϑ

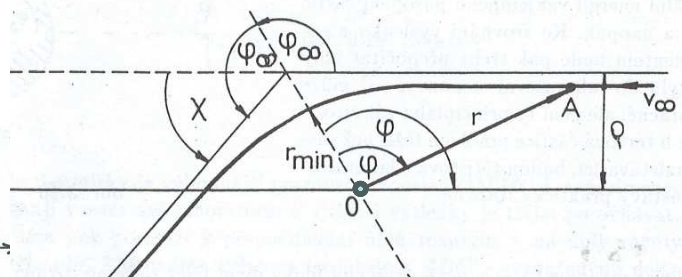


Pružný rozptyl částic na centru:
- rozptyl na tvrdé kuličce (izotropní rozptyl)
- rozptyl v coulombovském / newtonowském poli - Rutherfordův rozptyl (α-částice na jádře Au) :

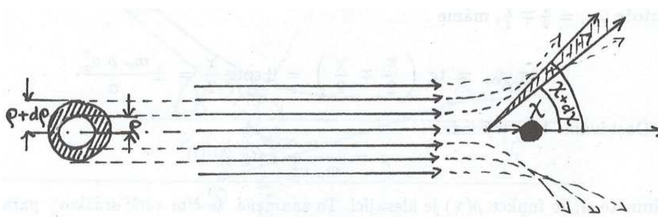
$$d\sigma = \frac{1}{4}\left(\frac{Ze^2}{E}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\chi}{2}}$$



obr. 3.21



obr. 3.22



Pozn. Laboratorní ss …

Rázy, srážky těles

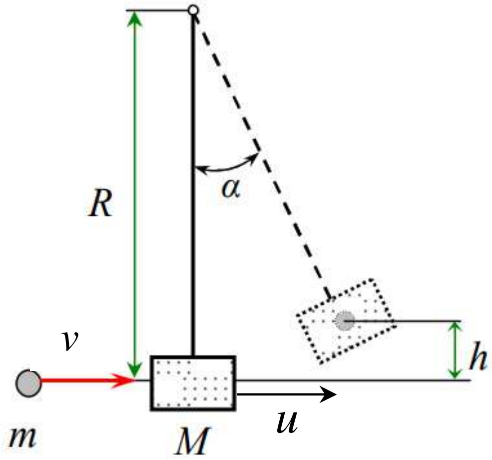
Př.: balistické kyvadlo - výpočet rychlosti střely v

a) střela m uvízne v krabici M

ZZH: $mv = (m+M)u$

ZZE: $\frac{1}{2}(m+M)u^2 = (m+M)gh$

Ř.: $v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$, kde $h = R(1-\cos\alpha)$



Dom.cv.:

b) Jaká část K.E. se ztratí (přemění na „teplo“): $\left(\frac{E_{poč}-E_{konc}}{E_{poč}} = \frac{M}{m+M}\right)$

c) Když střela po nárazu odskočí zpět rychlostí v_0 $\left(v = \frac{M}{m}\sqrt{2gh} - v_0\right)$

d) Když střela po nárazu ztratí rychlost a spadne dolů? $\left(v = \frac{M}{m}\sqrt{2gh}\right)$

Soustavy s proměnnou hmotností

Izolovaná soustava s hmotností M a rychlostí $\boldsymbol{v}$
během času dt se oddělí část $dM < 0$ s rychlostí $\boldsymbol{v}_1$ (spaliny m raketového motoru $dm = -dM$)

ZZH: $$\underbrace{M\vec{v}}_{\vec{P}_1} = \underbrace{\underbrace{(M + dM)(\vec{v} + d\vec{v})}_{\text{raketa}} - \underbrace{\vec{v}_1 dM}_{\text{plyny}}}_{P_2}$$

$\Longrightarrow$ (zanedb.členu 2.řádu $dM.dv$)

$$M\,d\vec{v} = (\vec{v}_1 - \vec{v})\,dM$$

tj. $M\,d\vec{v} = \vec{u}\,dM$ (*)

kde $(\vec{v}_1 - \vec{v}) = \vec{u}$
je relat.rychlost spalin(=*konst*)

Tedy změny M a rychlosti v během časového intervalu dt :

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}\frac{dM}{dt}$$ kde $d\vec{v}/dt = \vec{a}$ je zrychlení rakety

a pokud působí vnější síly (gravitace, odpor prostředí…):

$$\boxed{M\vec{a} = \vec{u}\frac{dM}{dt} + \vec{F}^E}$$

rce Meščerského, kde $\vec{u}\dfrac{dM}{dt}$ ... reaktivní (tažná) síla rakety

Pozn: $dM < 0$, tedy u a a mají opačný směr;
- hmota rakety M ubývá $\Rightarrow$ zrychlení rakety roste (neb pravá strana Meščerského rce je konstantní!)
- platí i pro opačnou úlohu: narůstání hmotnosti $dM > 0$, např. kapka vody nabírá vlhkost při pádu

Výsledná rychlost (změna rychlosti) rakety - integrací rce (*): $$\int_{v1}^{v2} dv = -u\int_{M_0}^{M_k}\frac{dM}{M}$$

$$\boxed{\Delta v = u\ln\frac{M_0}{M_k}}$$

rce Ciolkovského – výsledná rychlost rakety závisí jen na poměru hmotnosti na začátku a na konci a na relat.rychlosti plynů u