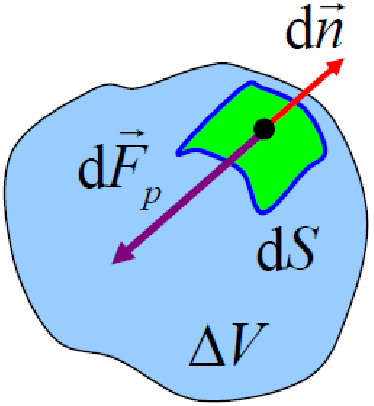
Gaussův zákon

(Gaussův zákon nebude vyžadován u zkoušky, literatura: např. Horák)



Skalární pole × vektorové pole
(derivace skal.pole, gradient,)

Tok vektorového pole uzavřenou plochou ohraničující objem V

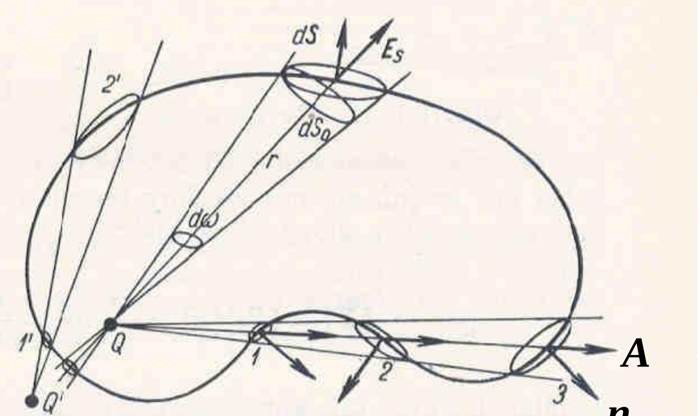
- Hustota toku vektoru $\boldsymbol{A}$ plochou dS, $\boldsymbol{n}$ – normála
- Tok plochou dS: $d\Phi = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{n}\, dS = \boldsymbol{A}.d\boldsymbol{S}$,
  kde $\boldsymbol{n}dS \equiv d\boldsymbol{S}$

  > 0 výtok
  = 0 ($\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{A}$, nebo vtok=výtok)
  < 0 vtok

- Celkový tok vektoru plochou S (= celkovému počtu siločár procházející plochou)

$$\Phi = \sum \vec{A}_k \Delta \vec{S}_k \rightarrow \boxed{\oiint_{S(V)} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \Phi}$$

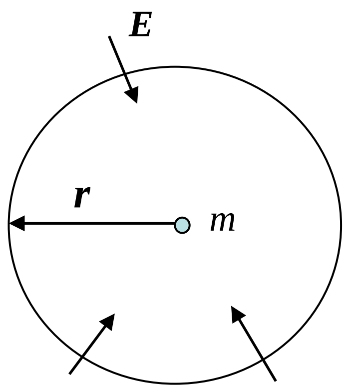
- Platí evidentně: tok vnější plochou
  = suma toků všemi vnitřními částmi



Obr. (5.1) 10. Silový tok bodového náboje uzavřenou plochou

Gaussův zákon

Gaussův zákon: $$\boxed{\oiint_{S(V)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = -4\pi\kappa \sum_{i\in V} m_i}$$



Celkový tok intenzity gravitačního pole *libovolnou* uzavřenou plochou = -4πκ násobku celkové hmoty <u>uzavřené uvnitř</u> plochy
pozn.1: plocha může mít libovolný tvar)
pozn.2:

$$\oiint_{S(V)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = -4\pi\kappa \int \rho dV$$ pro spojité rozložení hmoty uvnitř plochy

$$= 0$$ pokud není uvnitř plochy žádná hmota

Gaussův zákon – vztah mezi intenzitou pole na uzavřené Gaussově ploše a hmotou uzavřenou uvnitř plochy

Př.: grav.pole h.b. – z důvodů symetrie volíme G.plochu kouli o poloměru $r \Rightarrow$ na povrchu koule je intenzita grav.pole konstantní a kolmá k povrchu

$$\left.\begin{aligned}\Phi &= \oiint_{\substack{povrch\\koule}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E \oiint_{\substack{povrch\\koule}} dS = E\,4\pi r^2\\ \Phi &= -4\pi\kappa m\end{aligned}\right\} \quad E = -\kappa\frac{m}{r^2}$$

Pozn.:

Gaussova věta: $$\oiint_{S(V)} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dV$$ potom: $$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -4\pi\kappa\rho(\vec{r})}$$ **(Gaussův z. v dif.tvaru)**

kde $$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \equiv \mathrm{div}\vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\left(E_1,E_2,E_3\right) = \frac{\partial E_1}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}+\frac{\partial E_3}{\partial x_3}$$ divergence vektoru

Gaussův zákon

Gaussův z. ⇔ mocnitel *r* v Newt. g.z. je přesně 2 (závislost na vzdálenosti se kompenzuje)
Gaussův z. je ekvivalentní zápis pro Newtonův g.z.

Pozn. pro elektrické náboje (Coulombův z.): $\kappa \leftrightarrow -1/4\pi\varepsilon_0$ $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho(\vec{r})/\varepsilon_0}$ ρ - hustota el. náboje

Pozn. pole vně homogenní koule/kulové slupky – působící síla v lib. vzdálenosti je stejná, jako by veškerá hmota byla soustředěna v jejím středu, proč?

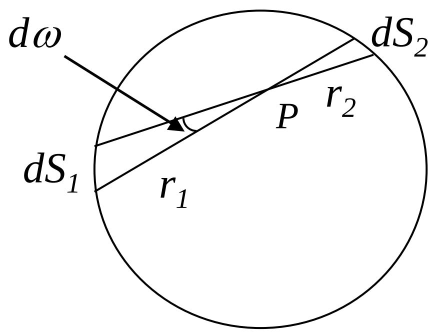
Př.: kulová slupka – vně stejně jako h.b., uvnitř 0
koule poloměru *R* – vně stejně jako h.b., uvnitř $\boldsymbol{E} = -\kappa m r/R^3$, ($r$ = vzdálenost od středu)
nekonečná deska $\boldsymbol{E} = -2\pi\kappa\sigma$, σ je plošná hustota desky
nekonečná tyč $\boldsymbol{E} = -2\kappa\rho/r$, ρ je délková hustota tyče
dvojdeska (kondenzátor) uvnitř 0, vně $2\boldsymbol{E}$ (kond.opačně)

Grav. pole uvnitř slupky – názorný pohled na základě Newt.g.z.:

$d\omega$ - prostorový úhel, z definice prost.úhlu:

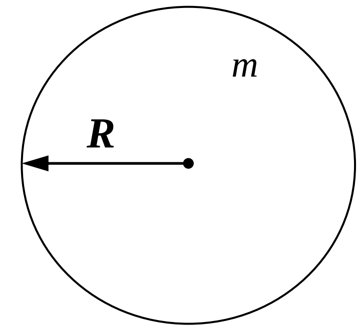
$d\omega = dS_1/r_1^2 = dS_2/r_2^2$, kde $dm = \sigma dS$ (σ je plošná hustota), tedy $dm_1/r_1^2 = dm_2/r_2^2$ neboli $dE_1 = dE_2$

Příspěvky dE od plošných elementů dS_i v lib.bodě P jsou stejně velké opačně orientované a vzájemně se kompenzují
Intenzita gravitačního pole v libovolném bodě uvnitř homogenní slupky = 0, potenciál φ = konst.
Ot.: Jedná se o "gravitační Faradayovu klec“ ?



Intenzita a poenciál kulové slupky a homogenní koule

Vně slupky / koule: $E = -\kappa \dfrac{m}{r^2}, \quad \varphi = -\kappa \dfrac{m}{r}$



Uvnitř slupky: $E = 0, \quad \varphi = const = -\kappa \dfrac{m}{R}$

Uvnitř koule: $E = -\kappa \dfrac{m'}{r^2} = -\kappa \dfrac{mr^3}{r^2 R^3} = -\kappa \dfrac{mr}{R^3}$

$$\varphi = -\int E dr = \kappa \frac{m}{R^3} \int r dr = \kappa \frac{mr^2}{2R^3} + C$$

kde $\varphi(R) = \kappa \dfrac{mR^2}{2R^3} + C = -\kappa \dfrac{m}{R}$ (spojitost fce), tj. $C = -\kappa \dfrac{3m}{2R}$

- nakresli grafy
- k čemu je to vše dobré?