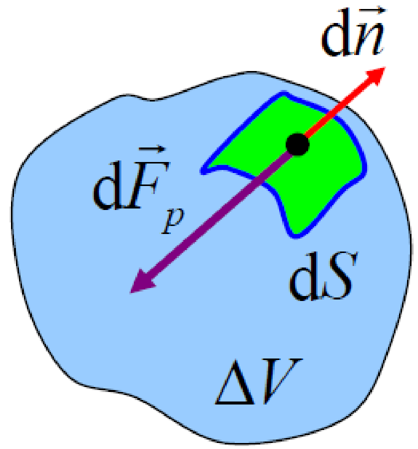
Gaussův zákon

(Gaussův zákon nebude vyžadován u zkoušky, literatura: např. Horák)



viz část FI-9 Hydromechanika:

Tok vektorového pole uzavřenou plochou ohraničující objem V

- Hustota toku vektoru $\boldsymbol{A}$ plochou dS, $\boldsymbol{n}$ – normála
- Tok plochou dS: $d\Phi = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{n}\, dS = \boldsymbol{A}.d\boldsymbol{S}$, kde $\boldsymbol{n}dS \equiv d\boldsymbol{S}$

  > 0 výtok

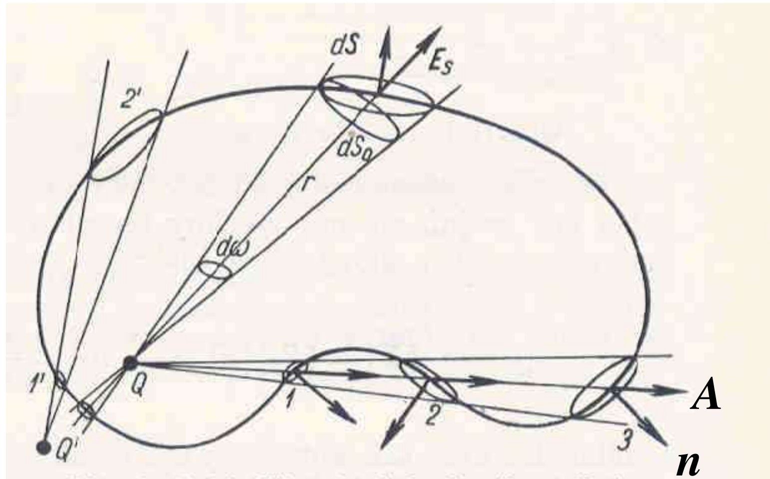
  = 0 ($\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{A}$, nebo vtok=výtok)

  < 0 vtok

- Celkový tok vektoru Gaussovou plochou S (~ celkovému počtu siločár procházející plochou)

$$\Phi = \sum \vec{A}_k \Delta \vec{S}_k \rightarrow \boxed{\oiint_{S(V)} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \Phi}$$

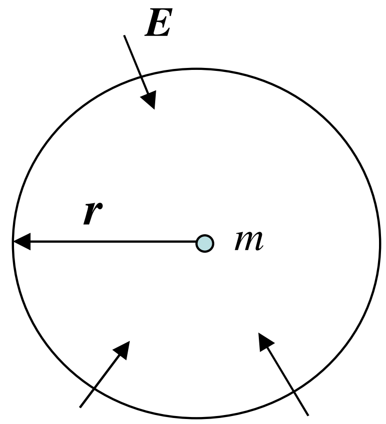
- Platí evidentně: tok vnější plochou = suma toků všemi vnitřními částmi



Obr. (5.1) 10. Silový tok bodového náboje uzavřenou plochou

Gaussův zákon

Gaussův zákon: $$\boxed{\oiint_{S(V)} \vec{I}\cdot d\vec{S} = -4\pi\kappa \sum_{i\in V} m_i}$$



Celkový tok intenzity *I* gravitačního pole *libovolnou* uzavřenou plochou = -4πκ násobku celkové hmoty <u>uzavřené uvnitř</u> plochy

pozn.1: plocha může mít libovolný tvar)

pozn.2:

$$\oiint_{S(V)} \vec{I}\cdot d\vec{S} = -4\pi\kappa \int \rho dV$$ pro spojité rozložení hmoty uvnitř plochy

$$= 0$$ pokud není uvnitř plochy žádná hmota

Gaussův zákon – vztah mezi intenzitou pole *E* na uzavřené Gaussově ploše a hmotou uzavřenou uvnitř plochy

Odvození NGZ z GZ pro h.b. resp. homog.kouli:
z důvodů symetrie volíme G.plochu kouli o poloměru $r \Rightarrow$ na povrchu koule je intenzita grav.pole konstantní a kolmá k povrchu:

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \oiint_{\substack{povrch\\koule}} \vec{I}\cdot d\vec{S} = I \oiint_{\substack{povrch\\koule}} dS = I\cdot 4\pi r^2 \\ \Phi &= -4\pi\kappa m \end{aligned}\right\} \quad I = -\kappa\frac{m}{r^2}$$

Pozn.:

Gaussova věta: $$\oiint_{S(V)} \vec{I}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{I}\, dV$$ potom: $$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{I} = -4\pi\kappa\rho(\vec{r})}$$ **(Gaussův z. v dif.tvaru)**

kde $$\vec{\nabla}\cdot\vec{I} \equiv \mathrm{div}\vec{I} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)(I_1, I_2, I_3) = \frac{\partial I_1}{\partial x_1} + \frac{\partial I_2}{\partial x_2} + \frac{\partial I_3}{\partial x_3}$$ … divergence vektoru

Gaussův zákon

Gaussův z. ⇔ mocnitel r v Newt. g.z. je přesně 2 (závislost na vzdálenosti se kompenzuje)
Gaussův z. je ekvivalentní zápis pro Newtonův g.z.

Pozn. pro elektrické náboje (Coulombův z.): $\kappa \leftrightarrow -1/4\pi\varepsilon_0$, tj. $\vec{\nabla} \cdot \vec{I} = Q / \varepsilon_0$ $\quad$ Q - el. náboj

Pozn. pole vně homogenní koule/kulové slupky – působící síla v lib. vzdálenosti je stejná, jako by veškerá hmota byla soustředěna v jejím středu, proč?

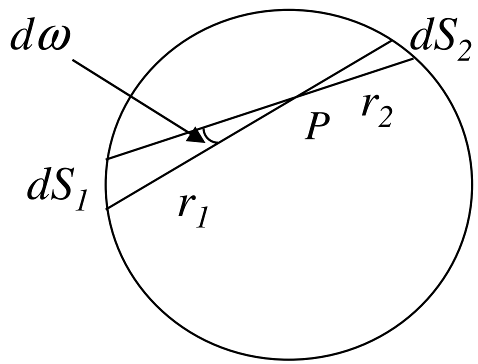
Př.: <u>kulová slupka</u> – $\boldsymbol{I}$ vně stejně jako h.b., uvnitř $\boldsymbol{I} = 0$
<u>koule poloměru R</u>: $\boldsymbol{I}$ vně stejně jako h.b., uvnitř $\boldsymbol{I} = -\kappa mr/R^3$, ($r$ = vzdálenost od středu)
nekonečná deska $\boldsymbol{I} = -2\pi\kappa\sigma$, σ je plošná hustota desky
nekonečná tyč $\boldsymbol{I} = -2\kappa\rho/r$, ρ je délková hustota tyče
dvojdeska uvnitř 0, vně $2\boldsymbol{I}$ (el. deskový kondenzátor opačně)

Grav. pole uvnitř slupky – názorný pohled na základě Newt.g.z.:

$d\omega$ - prostorový úhel, z definice prost.úhlu:

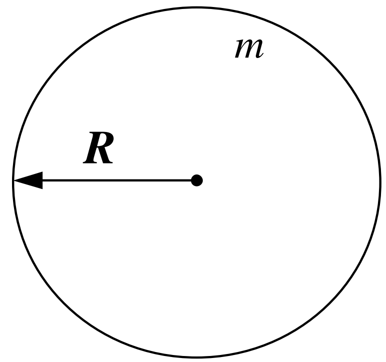
$d\omega = dS_1/r_1^2 = dS_2/r_2^2$, kde $dm = \sigma dS$ (σ je plošná hustota), tedy $dm_1/r_1^2 = dm_2/r_2^2$ neboli $dI_1 = dI_2$

Příspěvky dE od plošných elementů dS_i v lib.bodě P jsou stejně velké opačně orientované a vzájemně se kompenzují
Intenzita gravitačního pole v libovolném bodě uvnitř homogenní slupky = 0, potenciál φ = konst.
Ot.: Jedná se o "gravitační Faradayovu klec“ ?



Intenzita a potenciál kulové slupky a homogenní koule

Úloha: výpočet intenzity a potenciálu uvnitř s vně homogenní kole a slupky



Vně slupky / koule: $I = -\kappa \frac{m}{r^2}, \quad \varphi = -\kappa \frac{m}{r}$

Uvnitř slupky: $I = 0, \quad \varphi = const = -\kappa \frac{m}{R}$

Uvnitř koule: $I = -\kappa \frac{m'}{r^2} = -\kappa \frac{mr^3}{r^2 R^3} = -\kappa \frac{mr}{R^3}$

$$\varphi = -\int E dr = \kappa \frac{m}{R^3} \int r dr = \kappa \frac{mr^2}{2R^3} + C$$

na povrchu: $\varphi(R) = \kappa \frac{mR^2}{2R^3} + C = -\kappa \frac{m}{R}$ (spojitost φ, tj. $C = -\kappa \frac{3m}{2R}$)

- nakresli grafy