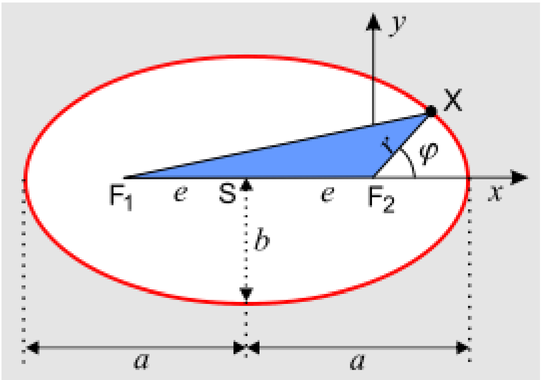
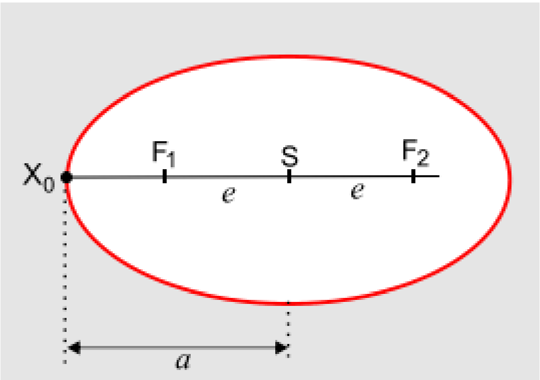
Následující texty jsou doplňující a odvození nebude požadované na zkoušce

Rovnice elipsy v polárních souřadnicích se středem v jednom z ohnisek (F2)





Elipsa je definována jako množina bodů, pro které je součet vzdáleností od dvou pevně daných bodů (ohnisek F_1 a F_2) konstantní, tj.

$$XF_1 + XF_2 = \text{const}\,. \tag{9.1}$$

Hodnotu konstanty snadno určíme pro bod $X = X_0$, který je situovaný podle pravého obrázku:

$$X_0F_1 + X_0F_2 = (a-e) + (a+e) = 2a\,.$$

Rovnice elipsy tedy bude mít tvar:

$$XF_1 + XF_2 = 2a\,, \tag{9.2}$$

kde X je libovolný bod na elipse. Jednotlivé body mají podle obrázku souřadnice:

$$\begin{aligned} X &= (r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,; \\ F_1 &= (-2e, 0)\,; \\ F_2 &= (0,0)\,. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Souřadnice bodů nyní dosadíme do rovnice elipsy, vzdálenost dvou bodů vyjádříme jako odmocninu ze součtu kvadrátů rozdílů souřadnic:

$$\mathrm{XF}_1 + \mathrm{XF}_2 = 2a \qquad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(r\cos\varphi + 2e)^2 + (r\sin\varphi)^2} + \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} = 2a \qquad \Rightarrow$$

$$\sqrt{r^2 + 4re\cos\varphi + 4e^2} \;+\; r = 2a\,.$$

To, že druhá vzdálenost musela vyjít r, je na první pohled patrné z obrázku. Ve výsledném vztahu ponecháme na levé straně jen odmocninu (člen r převedeme doprava) a obě strany umocníme na druhou:

$$\sqrt{r^2 + 4re\cos\varphi + 4e^2} = 2a - r \qquad \Rightarrow$$

$$r^2 + 4re\cos\varphi + 4e^2 = 4a^2 - 4ar + r^2 \qquad \Rightarrow$$

$$re\cos\varphi + e^2 = a^2 - ar \qquad \Rightarrow$$

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a + e\cos\varphi} = a\frac{1-(e/a)^2}{1+(e/a)\cos\varphi}\,.$$

Rovnice elipsy se většinou píše ve tvaru:

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}\,;$$

$$p \equiv a(1-\varepsilon^2)\,, \qquad p = b^2/a \tag{9.4}$$

$$\varepsilon \equiv e/a\,.$$

Veličiny p, ε se nazývají parametr elipsy a numerická (bezrozměrná, číselná) excentricita.

1. Keplerův zákon – odvození pohybu po elipsách

Při odvození tvaru trajektorie planety bychom mohli vyjít z pohybových rovnic a řešit diferenciální rovnice druhého řádu. Výhodnější ale bude vyjít ze zákonů zachování energie a momentu hybnosti. Z nich dostaneme soustavu dvou diferenciálních rovnic prvního řádu. Energie planety se skládá z translační energie v radiálním směru (přibližování a vzdalování od Slunce ve směru r), z rotační energie (v úhlovém směru φ) a z potenciální energie pohybu v poli Slunce:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 - G\frac{mM}{r} = E\,. \tag{9.5}$$

Druhým vztahem bude zákon zachování momentu hybnosti $J\omega$:

$$J\dot{\varphi} = b\,. \tag{9.6}$$

Obě veličiny se zachovávají, pravé strany jsou proto konstanty pohybu. Moment setrvačnosti planety vzhledem ke Slunci je dán jednoduchým vztahem (stejným jako pro kuličku na provázku), tj.

$$J = mr^2\,. \tag{9.7}$$

Po dosazení za J má soustava rovnic, kterou budeme řešit, tvar:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - G\frac{mM}{r} = E\,,\\ &mr^2\dot{\varphi} = b\,. \end{aligned}\right\}$$

tyto rovnice jsme odvodili na přednášce jiným způsobem. Zde $b \equiv L_3$

Nevýhodou je, že v první rovnici jsou časové derivace obou proměnných, tj. $\dot{r}$ i $\dot{\varphi}$. Proto vyjádříme časovou derivaci $\dot{\varphi}$ z druhé rovnice a dosadíme do první:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{b^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r} = E\,, \qquad mr^2\dot{\varphi} = b\,. \tag{9.9}$$

V dalším kroku vypočteme z obou rovnic časové derivace hledaných proměnných:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{b^2}{2mr^2} + G\frac{mM}{r}\right)}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{b}{mr^2}\,. \tag{9.10}$$

Nyní bychom mohli řešit pohyb planety za pomoci diferenčního schématu. My ale potřebujeme znát jen celkový tvar trajektorie, nikoli časovou závislost (v kterém čase je planeta na kterém místě). Proto vydělíme druhou rovnici první (tím se diferenciály dt vyruší):

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \frac{b/mr^2}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \left(\frac{b}{mr}\right)^2 + 2G\frac{M}{r}}}\,. \tag{9.11}$$

Přesněji: $\dfrac{d\varphi}{dr} = \dfrac{d\varphi}{dt}\dfrac{dt}{dr} \Rightarrow (9.11)$

Rovnici budeme separovat (diferenciál dr převedeme na pravou stranu a integrovat:

$$\int \mathrm{d}\varphi = \int \frac{b/mr^2}{\sqrt{\dfrac{2E}{m} - \left(\dfrac{b}{mr}\right)^2 + 2G\dfrac{M}{r}}}\,\mathrm{d}r\,. \tag{9.12}$$

Integrál na levé straně je jednoduchý, integrační konstanta ovlivní jen počáteční odečet úhlu, můžeme ji proto zvolit nulovou. Na pravé straně zavedeme substituci

$$\xi \equiv \frac{b}{mr}; \qquad \mathrm{d}\xi = -\frac{b}{mr^2}\mathrm{d}r. \tag{9.13}$$

Po provedení substituce máme:

$$\varphi = \int \frac{-1}{\sqrt{\dfrac{2E}{m} - \xi^2 + 2\dfrac{GmM}{b}\xi}}\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{9.14}$$

Výraz pod odmocninou doplníme na čtverec

$$\varphi = \int \frac{-1}{\sqrt{\dfrac{2E}{m} - \left(\xi - \dfrac{GmM}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{GmM}{b}\right)^2}}\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{9.15}$$

Vzhledem k tomu, že se pouze snažíme dokázat, že jde o rovnici elipsy, nebudeme vypisovat hodnoty jednotlivých konstant a výraz napravo napíšeme ve tvaru

$$\varphi = -\int \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{C^2 - (\xi - \xi_0)^2}} \; . \tag{9.16}$$

Konstantou C^2 jsme označili součet obou konstantních členů. Z integrálu vytkneme C

$$\varphi = -\frac{1}{C} \int \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\xi - \xi_0}{C} \right)^2}} \, . \tag{9.17}$$

a zavedeme poslední substituci

$$\eta = \frac{\xi - \xi_0}{C}\,; \qquad \mathrm{d}\eta = \frac{\mathrm{d}\xi}{C}. \tag{9.18}$$

Integrace přejde na jednoduchý tvar

$$\varphi = -\int \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}\,, \tag{9.19}$$

což je tabulkový integrál vedoucí na řešení

$$\varphi = \arccos \eta \; . \tag{9.20}$$

Závislost otočíme a vrátíme se k původním proměnným:

$$
\begin{aligned}
&\eta = \cos\varphi \quad \Rightarrow \\
&\frac{\xi - \xi_0}{C} = \cos\varphi \quad \Rightarrow \\
&\frac{b}{mr} - \xi_0 = C\cos\varphi \quad \Rightarrow \\
&\frac{b}{mr} = \xi_0 + C\cos\varphi \quad \Rightarrow
\end{aligned} \tag{9.21}
$$

$$
r = \frac{b/m}{\xi_0 + C\cos\varphi} = \frac{b/(m\xi_0)}{1+(C/\xi_0)\cos\varphi} = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}.
$$

Výsledná rovnice má tvar rovnice elipsy (9.4) s počátkem souřadnic (Sluncem) v ohnisku. Při výpočtu jsme mlčky předpokládali, že vliv planety na Slunce je zanedbatelný a Slunce zůstane v počátku souřadnic po celou dobu oběhu planety. První Keplerův zákon je tedy důsledkem gravitačního zákona a příslušných pohybových rovnic (respektive zákonů zachování z nich plynoucích). Druhý Keplerův zákon (zákon ploch) plyne ze zákona zachování momentu hybnosti a již jsme ho odvodili dříve. Zbývá tedy alespoň naznačit odvození třetího Keplerova zákona.

Rozbor poslední rovnice v (9.21) je v prezentacích z přednášky, podrobná diskuze viz též skripta Havránka

3. Keplerův zákon - pro tělesa srovnatelné hmotnosti při oběhu po kružnicích

Tělesa se pohybují kolem společného hmotného středu ve vzdálenostech r_A a r_B, kde $r_A + r_B = r$. Dostředivá síla $F_d = mr\omega^2$ se rovná gravitační, tedy:

$$m_A r_A \frac{4\pi^2}{T^2} = \kappa \frac{m_A m_B}{r^2}, \quad m_B r_B \frac{4\pi^2}{T^2} = \kappa \frac{m_A m_B}{r^2}$$

První rovnici zkrátíme m_A , druhou m_B a sečteme je:

$$r \frac{4\pi^2}{T^2} = \kappa \frac{m_A + m_B}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \text{3.KZ:} \ \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa\left(m_A + m_B\right)}$$

Známe-li vzdálenosti, umožňují uvedené vztahy vypočítat hmotnosti těles, např. hmotnost měsíce, ze známé hmotnosti země, vzdálenosti a času oběhu:

$$M_M = \frac{4\pi^2 r^3}{\kappa T^2} - M_Z$$

Zde však pozor – odečítáme dvě blízké hodnoty lišící se o ~1% → značná nepřesnost