

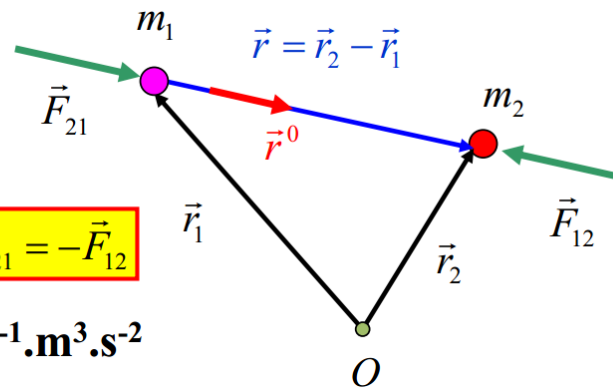
Gravitace

Newtonův gravitační zákon:

„Mezi dvěma tělesy o hmotnostech m_1 a m_2 , které jsou od sebe vzdáleny o r , působí stejně velké síly vzájemné přitažlivosti, jejichž velikost je přímo úměrná součinu hmotností m_1 a m_2 a nepřímo úměrná čtverci vzdáleností r “.

$$\vec{F}_{12} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}^0 = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$



κ - gravitační konstanta $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$

- gravitační síla je **síla přitažlivá a centrální**
- gravitační síla je **silou konzervativní** a může být proto charakterizována intenzitou E a potenciálem φ

$$\vec{F}_g = f(|\vec{r}|) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\vec{F}_{21} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

ve složkách: ..

Gravitace

Intenzita a potenciál gravitačního pole

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_g}{m} = -\kappa \frac{M}{r^3} \vec{r}$$

diskrétní rozložení hmoty

$$\vec{E} = -\kappa \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{r^3} \vec{r} dV$$

spojité rozložení hmoty

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\frac{d\varphi}{d\vec{r}}$$



$$\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = \kappa M \int \frac{dr}{r^2} = -\kappa \frac{M}{r} + K$$

$\vec{r} d\vec{r} = r dr$
proč?

integrační konstantu K lze volit, obvykle se volí $K=0$, potom hladina nulového potenciálu se nachází v nekonečnu ($r \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow 0$).

$$\varphi = -\kappa \frac{M}{r}$$

diskrétní rozložení hmoty

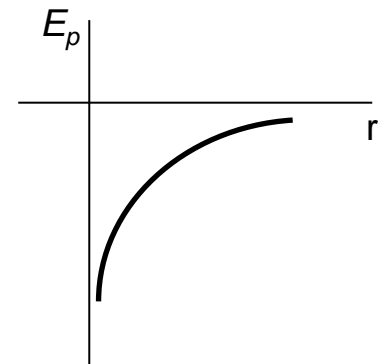
$$\varphi = -\kappa \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{r} dV$$

spojité rozložení hmoty

• Potenciální energie:

$$E_p = m\varphi = -\kappa \frac{mM}{r}$$

$$\Delta E_p = -\kappa m M \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$



Gravitační pole země

Gravitační pole země

Země má velmi přibližný tvar koule (geoid)

poloměr: $R = 6378 \cdot 10^3$ m

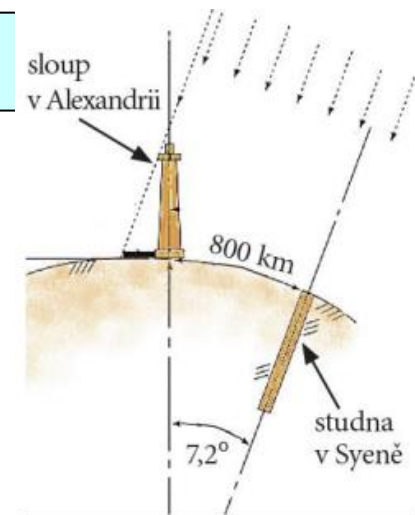
hmotnost: $m_Z = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg

velikost gravitačního zrychlení v nadmořské výšce h :

$$a_g = |\vec{E}| = \kappa \frac{m_Z}{(R+h)^2}$$

$$h = 0 \quad \longrightarrow$$

$$a_g \doteq g = \kappa \frac{m_Z}{R^2} \doteq 9,8 \text{ m/s}^2$$



Erathostenovo měření obvodu Země

Potenciální energie tělesa v nadmořské výšce h :

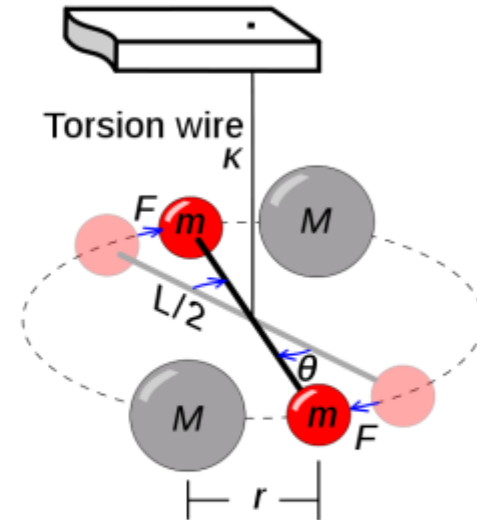
$$\Delta E_p = E_p(R+h) - E_p(R) = -\kappa \frac{m_Z m}{R+h} + \kappa \frac{m_Z m}{R} = mgR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = mg \frac{h}{1+h/R}$$

na povrchu země pro $h \ll R$: $E_p \approx mgh$

určení hmotnosti Z – Cavendish, 1798: "vážím zeměkouli"

Měření gravitační konstanty

- pro její určení bylo nutno provést skutečné měření síly působící mezi tělesy definované hmotnosti
- torzní váhy, kde tíhová síla působí na tělesa kolmo k ose rotace vah, takže nevlivní měření



Henry Cavendish (1731 – 1810, Anglie)

- měřil v r. 1798 pomocí torzních vah gravitační konstantu v jiných jednotkách – po přepočtu $\kappa = 6.74 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
- pro něj to ale byl nepříliš podstatný mezivýsledek
- konečným publikovaným výsledkem jeho experimentu byla právě průměrná hustota planety Země (5.448 g cm^{-3})

Gravitace

⊕ **Tíha** - síla, která uděluje tělesu zrychlení volného pádu

⊕ na povrchu Země je dána vektorovým součtem gravitační síly a síly odstředivé (vyvolané rotací Země)

$$\vec{G} = m\vec{g} = \vec{F}_g + \vec{F}_{od}$$

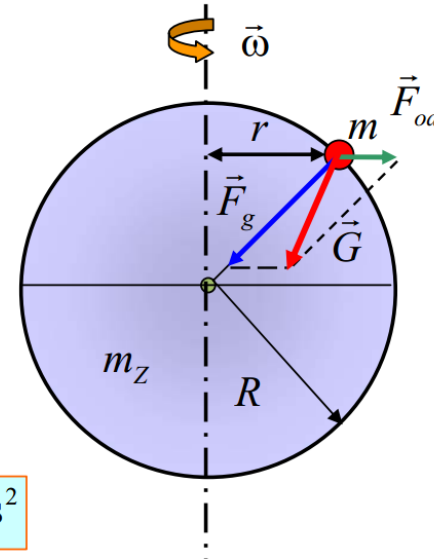
$$a_{od} = \omega^2 r \ll a_g \quad r \in (0, R)$$

⊕ **tíhové zrychlení** – závisí na zeměpisné šířce, zploštění Země,...

zeměpisný pól → $g \doteq 9,83 \text{ m/s}^2$

rovník → $g \doteq 9,79 \text{ m/s}^2$

45° severní šířky → $g_n = |\vec{g}| \doteq 9,80665 \text{ m/s}^2$
(přesně)



Měření tíhového zrychlení - reverzní kyvadlo (praktikum), balistický gravimetr (volný pád ve vakuu)

Př.: jak se liší g u země a u hlavy (aneb k čemu může být dobrý totální diferenciál)

$$a_g = \kappa m_Z / r^2 \quad da_g = -2\kappa m_Z dr / r^3 = -2a_g dr / r, \quad \text{kde } r = R + h, \quad dr = h = 1.7 \text{ m}$$

$$da_g = 4.37 \cdot 10^{-6} \text{ ms}^{-2} \quad \dots \quad \text{určení změn } a_g \text{ i bez znalosti } \kappa, m_Z$$

Potenciální energie soustavy

P.E. – interakční energie, společná vlastnost obou těles

P.E. pro více těles:
$$E_p = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} -\kappa \frac{m_i m_j}{2r_{ij}}$$

$$E_{\text{celk}} = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} -\kappa \frac{m_i m_j}{2r_{ij}} = \text{const}$$

Kontrola: předmět vyhozený vzhůru se vzdaluje od Z

- roste nebo klesá jeho P.E.?

- práce vykonaná gravitační silou je kladná nebo záporná?

Př.: předmět (míč) vyhozený vzhůru – K.E. míče ve srovnání s K.E. země

Kosmické rychlosti

Kruhová rychlost (1. kosmická):

$$F_g = F_d \Rightarrow \kappa \frac{mM_Z}{R^2} = \frac{mv_k^2}{R} \Rightarrow v_k = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R}} \Rightarrow \text{stanovení hmotnosti planet (hvězd)}$$

první kosmická rychlost:

$$R = R_Z \Rightarrow v_I = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z}} = \sqrt{g R_Z} \doteq 7,9 \text{ km s}^{-1} \quad \text{pozn. } g = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2}$$

Úniková rychlost (2. kosmická) – opuštění grav. působení Z:

$$\text{v centrálním gravitačním poli: } \frac{1}{2}mv^2 - \kappa \frac{mM_Z}{R} = E$$

parabolická dráha nebo hod svisle vzhůru, aby těleso nespadlo zpět: $E = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \kappa \frac{mM_Z}{R} = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R}}$$

$$R = R_Z \Rightarrow v_{II} = \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R_Z}} = \sqrt{2g R_Z} \doteq 11,2 \text{ km s}^{-1}$$

(pozn. nutná 2-násobná energie proti 1.kosm., v_{II} pro slunce = 615 km s⁻¹)

$$\text{3. kosmická: } v_{III} = \sqrt{\frac{2\kappa M_S}{R_{ZS}}} = 42,1 \text{ km s}^{-1}$$

oběž.rychl. Z: 29,7 km s⁻¹ opuštění grav. působení S

Pozn. Schwarzschildův poloměr: $R_S = 2\kappa m/c^2$ (1916, Laplace 1798)

pro Slunce $R_S = 3 \text{ km}$, Země 9 mm, č.d. uprostřed naší galaxie $7.8 \times 10^6 \text{ km}$

Pozn. Slapové síly, přelévání momentu hybnosti $Z \rightarrow M$, synchronizace pohybu Z a M:

$$\Delta T = 20 \mu\text{s/rok}, \Delta r = 3 \text{ cm/rok}$$

Pozn. gravitační prak

Energie při pohybu v centrálním poli

Při kruhovém pohybu: $F_g = F_d$

$$\kappa \frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \rightarrow \quad \kappa \frac{mM}{2r} = \frac{mv^2}{2}$$
$$-E_p/2 = E_k$$

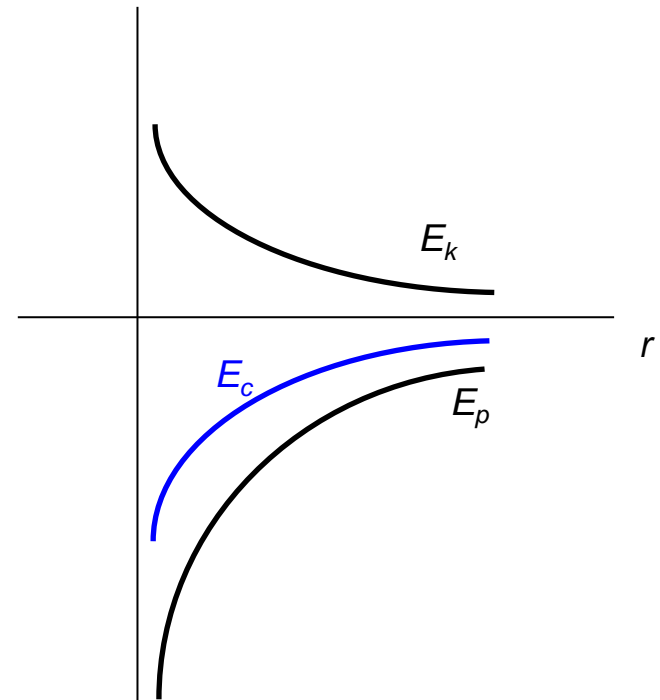
Celková energie tělesa při pohybu v centrálním poli:

$$E_{celk} = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \kappa \frac{mM}{r} = E_p/2 = -E_k$$

$E_{celk} < 0$ kruhový, eliptický pohyb

$E_{celk} = 0$ pohyb po parabole

$E_{celk} > 0$ pohyb po hyperbole



Pozn.: QM - atom

Paradox padajícího satelitu

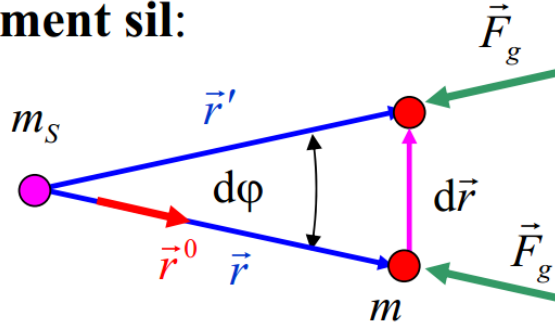
Gravitace

Moment sil v centrálním poli:

Působí-li na těleso pouze centrální síla (např. gravitační), potom **na těleso působí nulový moment sil:**

$$M = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times F(r) \frac{\vec{r}}{r} = 0$$

$$\vec{F}_g = f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{0}$$



$$\vec{L} = \text{konst.}$$

**zachovává se moment
hybnosti tělesa**

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad \rightarrow \quad m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\vec{\omega}r^2 = \text{konst}$$

kruh. pohyb

\Rightarrow vektory \mathbf{r} a \mathbf{v} leží v rovině kolmé k \mathbf{L} , $\mathbf{L} \parallel \boldsymbol{\omega} \rightarrow$ plošný pohyb

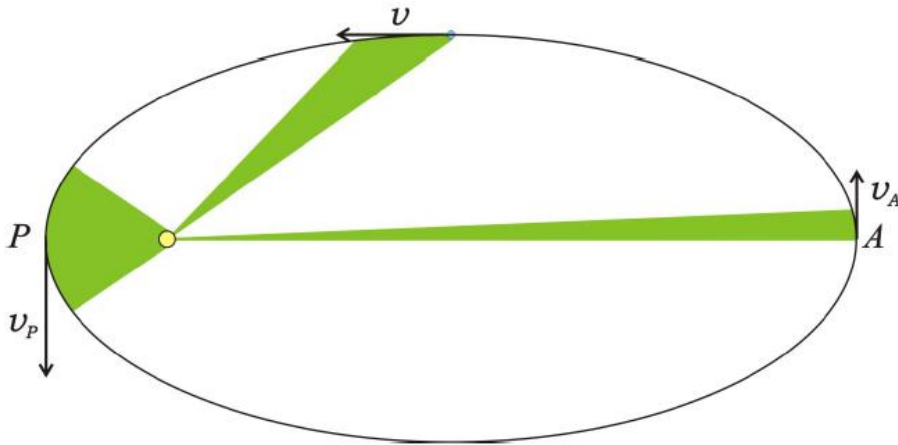
Závěr: jak celková energie tak celkový orbitální moment (\equiv moment hybnosti) těles, na které působí pouze centrální síly, jsou konstantami pohybu.

Pohyb v nehomogenním gravitačním poli – Keplerova úloha

1. Keplerův zákon

Planety obíhají kolem Slunce po elipsách, v jejichž jednom ohnisku leží Slunce.

2. Keplerův zákon



$$v_p \equiv \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{L}{2m}$$

Průvodič spojující Slunce s planetou opisuje stejné plochy za stejné časové intervaly.

3. Keplerův zákon

Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je roven poměru třetích mocnin velkých poloos jejich trajektorií.

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

Pohyb v nehomogenním gravitačním poli – Keplerova úloha

2. K.Z. – plošná rychlost konstantní, co z toho plyne:

$$\vec{v}_P = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{\vec{L}}{2m} = \textit{konst} \quad \text{tedy} \quad 0 = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{a} = 0$$

\Rightarrow zrychlení vždy $\vec{a} \parallel \vec{r}$

tedy 2. K. Z. \Rightarrow síla je centrální, leží na spojnici planety a slunce

Úkol:

- dokaž, že při pohybu v centrálním poli je moment hybnosti konstantní
- odvod' 3. K. Z. pro kruhový pohyb

Pohyb v nehomogenním gravitačním poli – Keplerova úloha

1. KZ odvození

(Následující odvození dráhy pohybu nebude vyžadováno ke zkoušce a výklad I. Keplerova zákona bude vyžadován pouze v přehledu). *Vycházíme ze zákonů zachování energie a mom. hybnosti*

Složky rychlosti dostaneme derivováním III dle času ; v polárních souřadnicích:

$$x = r \cos \varphi \quad v_x = \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi \quad (2.24)$$

$$y = r \sin \varphi \quad v_y = \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \cos \varphi$$

Pro konstantní vektor b_0 z (2.23) dále platí (viz obr. 2.2)

$$L_2 = m(x_1 v_2 - x_2 v_1) \quad ; \quad L_3 \equiv b_0 = mrv \sin \alpha = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{konst} \quad (2.25) \quad \underline{L_3 = mr^2 \dot{\varphi}}$$

Pro celkovou mechanickou energii platí dle (1.95) a (2.8)

$$E_M = E_0 = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\kappa m M}{r} = \text{konst} \quad (2.26)$$

Dále platí z (2.24)

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad (2.27)$$

a tedy

$$E_0 = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - \kappa \frac{mM}{r} \quad (2.28)$$

Z rovnic (2.25) a (2.28) můžeme nyní určit závislosti $\frac{dr}{dt}$ a $\frac{d\varphi}{dt}$. Je

Pohyb v nehomogenním gravitačním poli – Keplerova úloha

Z rovnic (2.25) a (2.28) můžeme nyní určit závislosti $\frac{dr}{dt}$ a $\frac{d\varphi}{dt}$. Je

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{b_0}{mr^2} \quad \text{zde } b_0 \equiv L_3 \quad (2.29)$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2E_0}{m} + \frac{2\alpha}{mr} - \frac{b_0^2}{m^2 r^2}} \quad (2.30)$$

kde jsme zavedli $\alpha = \kappa m M$.

Při řešení Keplerovy úlohy nás místo časových závislostí $r(t)$ a $\varphi(t)$ zajímá pouze dráha $\varphi(r)$. Využijeme vztahu

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{dr} \quad (2.31)$$

Dosadíme-li sem z (2.29) a (2.30), máme

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{b_0}{mr^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2E_0}{m} + \frac{2\alpha}{mr} - \frac{b_0^2}{m^2 r^2}}} \quad (2.32)$$

Pohyb v nehomogenním gravitačním poli – Keplerova úloha

a polární úhel φ bude dán integrálem z pravé strany dle proměnné r . Jak se lze přesvědčit derivováním, je výsledkem integrace funkce

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{b_0}{r} - \frac{\alpha m}{b_0}}{\sqrt{2mE_0 + \frac{\alpha^2 m^2}{b_0^2}}} + k \quad (2.33)$$

zkrátíme nyní zlomek výrazem $\frac{\alpha m}{b_0}$, kde bude

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{b_0^2}{\alpha m r} - 1}{\sqrt{\frac{2E_0 b_0^2}{\alpha^2 m} + 1}} + k \quad (2.34)$$

Označme ještě nyní

$$p = \frac{b_0^2}{\alpha m} \quad ; \quad p = \frac{b^2}{a} \quad \begin{array}{l} \text{malá poloosa} \\ \text{velká} \end{array} \quad (2.35)$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2E_0 b_0^2}{\alpha^2 m} + 1}$$

Pohyb v nehomogenním gravitačním poli – Keplerova úloha

(2.33) pak přejde na tvar

$$\varphi = \arccos \frac{p-1}{\varepsilon} + k \quad (2.36)$$

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - k)}$$

(konec nepovinného odvození)

což je polární rovnice kuželosečky*. Zde veličina r udává vzdálenost bodu na kuželosečce od jednoho ohniska a úhel $(\varphi - k)$ je úhlem, který průvodič svírá s osou kuželosečky procházející ohniskem. Pro určení charakteru kuželosečky je rozhodující parametr ε . Platí

$$\varepsilon < 1 \dots\dots\dots \text{elipsa} \quad (2.37)$$

$$\varepsilon = 1 \dots\dots\dots \text{parabola}$$

$$\varepsilon > 1 \dots\dots\dots \text{hyperbola}$$

Podmínka (2.37) znamená dle (2.35)

$$\text{elipsa } E_0 < 0 \quad (2.38)$$

$$\text{parabola } E_0 = 0$$

$$\text{hyperbola } E_0 > 0$$

*) počátek s.s. je v ohnisku

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2E_0 b_0^2}{\alpha^2 m} + 1}$$

$$p = \frac{b_0^2}{\alpha m}$$

$$\alpha = \kappa m M$$

$$b_0 \equiv L_3$$

Pohyb v nehomogenním gravitačním poli – Keplerova úloha

Omezíme-li se na $E_0 < 0$, je obsahem rovnice (2.36) 1. Keplerův zákon:

Planety obíhají kolem Slunce po elipsách, v jejichž jednom ohnisku leží Slunce.

Je-li $E_0 \geq 0$, není dráha hmotného bodu uzavřená a hmotný bod projde silovým polem pouze jednou. Nejmenší velikost rychlosti, kterou musí hmotný bod ve vzdálenosti r od centrální hmoty mít, aby mohl pole opustit, získáme z podmínky

$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 - \kappa \frac{mM}{r} = 0 \quad (2.39)$$

$$v = \sqrt{\frac{2\kappa M}{r}}$$

Dosadíme-li sem hmotnost Země za M a poloměr Země R_z za r , dostaneme 2. kosmickou rychlost (rychlost k opuštění Země při startu ze zemského povrchu). Její hodnota je přibližně 11,2 km/s.

poloosy

$$a = - \frac{\kappa}{2E_0} = - \frac{\kappa m M}{2E_0}$$

$$b = \frac{L_3}{\sqrt{2|E_0|m}}$$

Velká poloosa určena celkovou energií tělesa

ot.: pokud při pohybu po elipse roste celková energie, roste nebo klesá velikost velké poloosy?

Pohyb v nehomogenním gravitačním poli – Keplerova úloha

Odvodíme (odvození opět nebude vyžadováno ke zkoušce) na závěr ještě vztah mezi dobou oběhu hmotného bodu a velikostí velké poloosy a tohoto pohybu. Součin plošné rychlosti a doby oběhu T musí být roven obsahu elipsy o poloosách a , b

$$T v_p = \pi ab \quad (2.40)$$

Dosadíme-li sem z (2.23), máme

$$T b_0 = 2\pi ab \quad (2.41)$$

Z teorie kuželoseček vyplývá, že v případě elipsy je parametr p roven $\frac{b^2}{a}$.

Dosadíme-li za p z (2.35), máme

$$b = b_0 \left(\frac{a}{\alpha m} \right)^{1/2} \quad (2.42)$$

Dosadíme nyní do (2.41) a rovnici upravíme

$$T b_0 = 2\pi ab_0 \left(\frac{a}{\alpha m} \right)^{1/2} \quad (2.43)$$

$$T = 2\pi m^{1/2} a^{3/2} \alpha^{-1/2}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m a^3}{\alpha}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa M} = \text{konst.}$$

3. Keplerův zákon:

Pozn. Pokud hmotnost m_1 obíhajícího tělesa není zanedbatelná vůči hmotnosti m_2 centrálního tělesa – viz problém dvou těles ... obě tělesa obíhají po elipsách

Gravitační pole Země

Hmotnost Z, S, planet:

- z gravitačního zrychlení: $a_g = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2}$, $M_Z = a_g R_Z^2 / \kappa = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$

- z oběžných dob (měsíců a satelitů kolem centra), 3.KZ $\Rightarrow M = 4\pi^2 R^3 / \kappa T^2$

- a jak určovali hmotu měsíce, když neznali vzdálenosti a oběžné doby?

Lagrangeovy body - liberační centrum

Librační centrum (Lagrangeův bod, 1772) – body v soustavě tří těles (slunce S, planeta Z, těleso) rotujících kolem společného těžiště, v němž se vyrovnávají gravitační a odstředivé síly působící na třetí (relativně lehké) těleso tak, že toto těleso umístěné v daném bodě nemění vůči soustavě svou polohu vůči S a Z: v bodě L1 (L2 a L3) snižuje (zvyšuje) Z grav.působení S a oběh tělesa se synchronizuje s oběhem Z.

Centra L1 a L2 soustavy S-Z lze využít pro umístění družic pro pozorování Slunce nebo vesmíru (teleskop Jamese Webba v L2). Jsou vzdálena asi 1,5 milionu km (0,01 au) od Země.

Poloha tělesa je stabilní pouze v bodech L4 a L5 (těleso má při výchylce tendenci kolem těchto bodů oscilovat). V reálu je jejich stabilita omezená (vlivem působení dalších planet), relativně stabilní je pouze u Jupitera (zachycené planetky).

Body L1, L2 a L3 jsou v rovině oběhu nestabilní i při malé výchylce od ideální polohy, lze však najít skloněné polostabilní „halo“ dráhy kolem těchto bodů (využívané k umístování družic).

