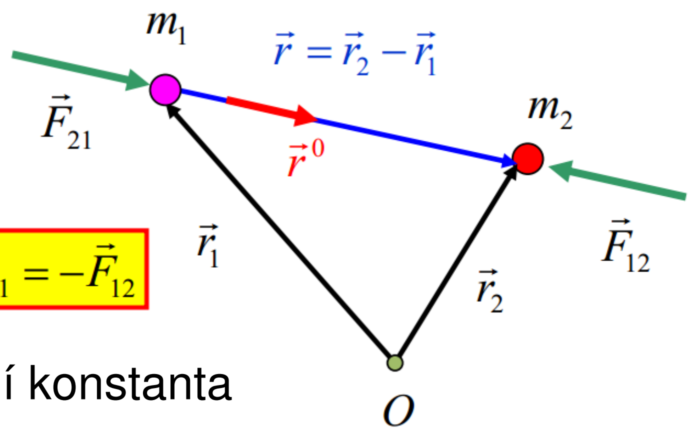
Gravitace

Newtonův gravitační zákon:

„Mezi dvěma tělesy o hmotnostech m_1 a m_2, které jsou od sebe vzdáleny o r, působí stejně velké síly vzájemné přitažlivosti, jejichž velikost je přímo úměrná součinu hmotností m_1 a m_2 a nepřímo úměrná čtverci vzdáleností r“.

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}^{\,0} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}}$$

$$\boxed{\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}}$$



κ = 6,6743 x 10^{-11} $m^3 kg^{-1} s^{-2}$ gravitační konstanta

$$\boxed{\vec{F}_g = f(|\vec{r}|)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}}$$

- gravitační síla je **síla přitažlivá** a **centrální**
- gravitační síla je **silou konzervativní** a může být proto charakterizována intenzitou ***E*** a potenciálem φ

$$\vec{F}_{21} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Úkol: napište $\boldsymbol{F}_{21}$ ve složkách

Gravitace

Intenzita $\boldsymbol{E}$ a potenciál φ gravitačního pole

$$\vec{I} = \frac{\vec{F}_g}{m} = -\kappa \frac{M}{r^3}\vec{r}$$

diskrétní rozložení hmoty

$$\vec{I} = -\kappa \int \frac{\rho(\vec{r})}{r^3}\vec{r}\,dV$$

spojité rozložení hmoty

$$\vec{I} = -\nabla\varphi \equiv -\frac{d\varphi}{d\vec{r}}$$

$$\varphi = -\int \vec{I}\cdot d\vec{r} = \kappa M \int \frac{\vec{r}}{r^3}d\vec{r} = \kappa M \int \frac{dr}{r^2} = -\kappa\frac{M}{r} + K$$

$\vec{r}\,d\vec{r} = r\,dr$

proč?

integrační konstantu K lze volit, obvykle se volí K=0, potom hladina nulového potenciálu se nachází v nekonečnu ($r \to \infty$, $\varphi \to 0$).

$$\varphi = -\kappa\frac{M}{r}$$

diskrétní rozložení hmoty

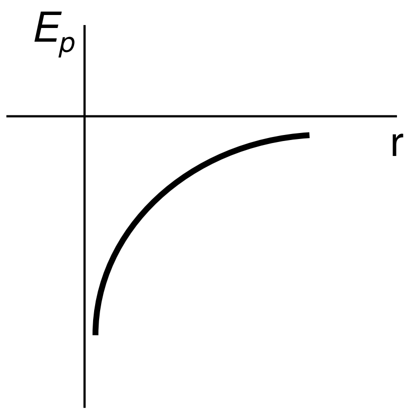
$$\varphi = -\kappa\int_V \frac{\rho(\vec{r})}{r}\,dV$$

spojité rozložení hmoty

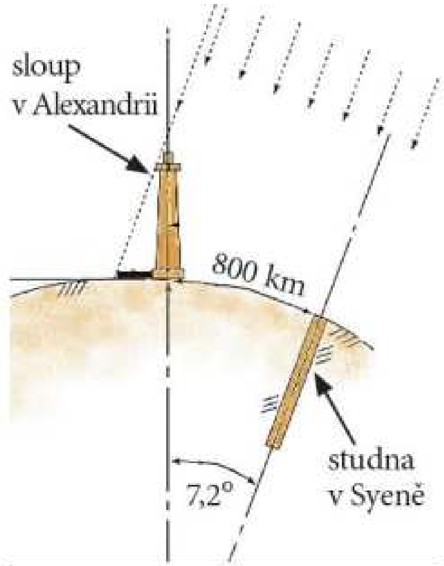
- **Potenciální energie:**

$$E_p = m\varphi = -\kappa\frac{mM}{r}$$

$$\Delta E_p = -\kappa mM\left(1/r_2 - 1/r_1\right)$$



Gravitační pole země



Erathostenovo měření obvodu Země

Gravitační pole země

Země má velmi přibližný tvar koule (geoid)

poloměr: $R = 6378 \cdot 10^3$ m

hmotnost: $m_Z = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg

velikost gravitačního zrychlení v nadmořské výšce h:

$$a_g = \left|\vec{E}\right| = \kappa \frac{m_Z}{(R+h)^2} \qquad h = 0 \Rightarrow \qquad \boxed{a_g \doteq g = \kappa \frac{m_Z}{R_Z^2} \doteq 9{,}8\ m/s^2}$$

Potenciální energie tělesa v nadmořské výšce h:

$$\Delta E_p = E_p(R+h) - E_p(R) = -\kappa \frac{m_Z m}{R+h} + \kappa \frac{m_Z m}{R} = mgR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = mg\frac{h}{1+h/R}$$

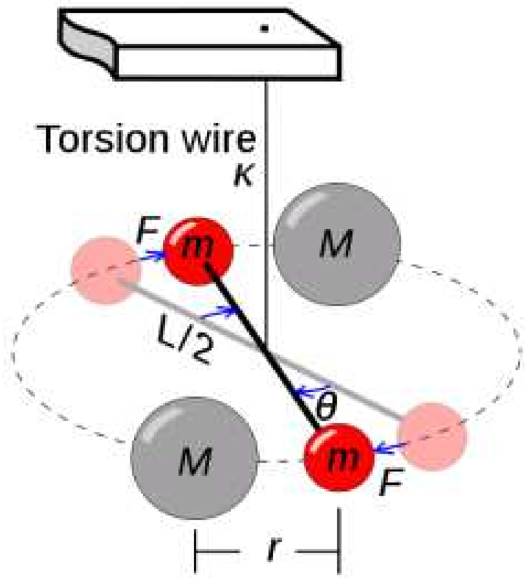
na povrchu země pro $h << R$: $\qquad E_p \approx mgh$

určení hmotnosti Z – Cavendish, 1798: "vážím zeměkouli"

Měření gravitační konstanty

- pro její určení bylo nutno provést skutečné měření síly působící mezi tělesy definované hmotnosti

- torzní váhy, kde tíhová síla působí na tělesa kolmo k ose rotace vah, takže nevlivní měření



Henry Cavendish (1731 – 1810, Anglie)

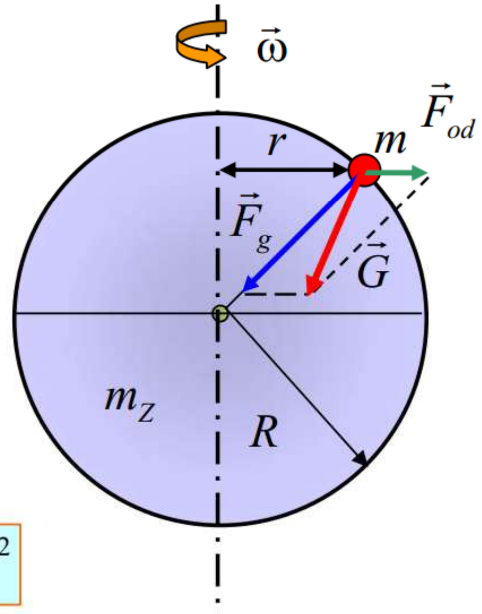
- měřil v r. 1798 pomocí torzních vah gravitační konstantu v jiných jednotkách – po přepočtu $\kappa = 6.74 \times 10^{-11} \mathrm{kg}^{-1}\, \mathrm{m}^3 \mathrm{s}^{-2}$
- pro něj to ale byl nepříliš podstatný mezivýsledek
- konečným publikovaným výsledkem jeho experimentu byla právě průměrná hustota planety Země (5.448 g cm^{-3})

Gravitace

Tíha - síla, která uděluje tělesu zrychlení volného pádu

- na povrchu Země **je dána vektorovým součtem gravitační síly** a **síly odstředivé** (vyvolané rotací Země)

$$\boxed{\vec{G} = m\vec{g} = \vec{F}_g + \vec{F}_{od}} \qquad a_{od} = \omega^2 r << a_g \quad r \in (0, R)$$



- **tíhové zrychlení** – závisí na zeměpisné šířce, zploštění Země,…

zeměpisný pól → $g \doteq 9{,}83 \text{ m/s}^2$

rovník → $g \doteq 9{,}79 \text{ m/s}^2$

45° severní šířky → $g_n = |\vec{g}| \doteq 9{,}80665 \text{ m/s}^2$ (přesně)

Měření tíhového zrychlení - reverzní kyvadlo (praktikum), balistický gravimetr (volný pád ve vakuu)

Př.: jak se liší g u země a u hlavy (aneb k čemu může být dobrý totální diferenciál)

$$a_g = \kappa m_Z / r^2 \quad da_g = -2\kappa m_Z dr / r^3 = -2a_g dr / r, \quad \text{kde } r = R + h,\ dr \equiv h = 1.7\text{m}$$

$$da_g = 4.37 \cdot 10^{-6} \text{ms}^{-2} \quad ..... \quad \text{určení změn } a_g \text{ i bez znalosti } \kappa, m_Z$$

Potenciální energie soustavy

P.E. – interakční energie, společná vlastnost obou těles

P.E. pro více těles: $$E_p = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} -\kappa \frac{m_i m_j}{2 r_{ij}}$$

$$E_{celk} = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} -\kappa \frac{m_i m_j}{2 r_{ij}} = const$$

Kontrola: předmět vyhozený vzhůru se vzdaluje od Z
- roste nebo klesá jeho P.E.?
- práce vykonaná gravitační silou je kladná nebo záporná?

Př.: předmět (míč) vyhozený vzhůru – porovnejte K.E. míče s K.E. Země

Kosmické rychlosti

Kruhová rychlost (1. kosmická):

$$F_g = F_d \;\Rightarrow\; \kappa\frac{mM_Z}{R^2} = \frac{mv_k^2}{R} \;\Rightarrow\; \boxed{v_k = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R}}}$$

$\Rightarrow$ stanovení hmotnosti planet (hvězd)

první kosmická rychlost:

$$R = R_Z \;\Rightarrow\; v_I = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{R_Z}} = \sqrt{gR_Z} \doteq 7,9 \text{ km s}^{-1}$$

pozn. $a_g = \kappa\dfrac{M_Z}{R_Z^2}$

Úniková rychlost (2. kosmická) – opuštění grav. působení Z:

v centrálním gravitačním poli: $\frac{1}{2}mv^2 - \kappa\frac{mM_Z}{R} = E$

parabolická dráha nebo hod svisle vzhůru, aby těleso nespadlo zpět: $E = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \kappa\frac{mM_Z}{R} = 0 \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R}}$$

$$R = R_Z \;\Rightarrow\; \boxed{v_{II} = \sqrt{\frac{2\kappa M_Z}{R_Z}} = \sqrt{2gR_Z} \doteq 11{,}2 \text{ km s}^{-1}}$$

(pozn. nutná 2-násobná energie proti 1.kosm., v_{II} pro slunce = 615 km s^{-1})

3. kosmická: $\boxed{v_{III} = \sqrt{\dfrac{2\kappa M_S}{R_{ZS}}} = 42{,}1 \text{ km s}^{-1}}$ oběž.rychl. Z: 29,7 km s^{-1} opuštění grav. působení S

Pozn. Schwarzschildův poloměr: $R_S = 2\kappa m / c^2$ (1916, Laplace 1798)

pro Slunce R_s = 3 km, Země 9 mm, č.d. uprostřed naší galaxie 7.8 x 10^6 km

Pozn. Slapové síly, přelévaní momentu hybnosti Z $\rightarrow$ M, synchronizace pohybu Z a M:

ΔT = 20μs/rok, Δr = 3 cm/rok

Pozn. gravitační prak

Energie při pohybu v centrálním poli

Při kruhovém pohybu: $F_g = F_d$

$$\kappa \frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \rightarrow \quad \kappa \frac{mM}{2r} = \frac{mv^2}{2}$$

$$-E_p/2 = E_k$$

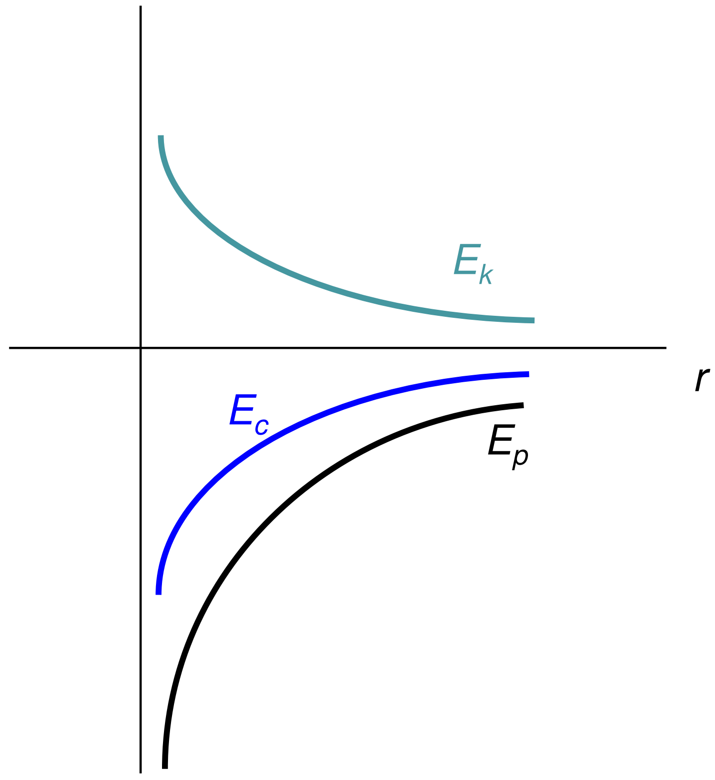
Celková energie tělesa při pohybu v centrálním poli:

$$E_{celk} = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \kappa \frac{mM}{r} = \qquad E_p/2 = -E_k$$

$E_{celk} < 0$ kruhový, eliptický pohyb

$E_{celk} = 0$ pohyb po parabole

$E_{celk} > 0$ pohyb po hyperbole



Pozn.: QM - atom

Paradox padajícího satelitu

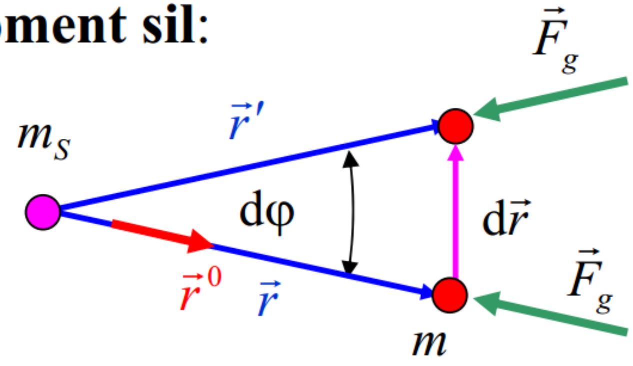
Gravitace

Moment sil v centrálním poli:

Působí-li na těleso pouze centrální síla (např.gravitační), potom **na těleso působí nulový moment sil**:

$$\vec{F}_g = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

$$M = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times F(r)\frac{\vec{r}}{r} = 0$$



$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} = \vec{0}} \Rightarrow \boxed{\vec{L} = \text{konst.}}$$

zachovává se moment hybnosti tělesa

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v} \underset{kruh.\,pohyb}{\longrightarrow} m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\vec{\omega} r^2 = \vec{k}onst$$

$\Rightarrow$ vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}$ leží v rovině kolmé k $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{L} \parallel \boldsymbol{\omega} \rightarrow$ plošný pohyb

Závěr: jak celková energie tak celkový orbitální moment (≡ moment hybnosti) **těles, na které působí pouze centrální síly, jsou konstantami pohybu.**

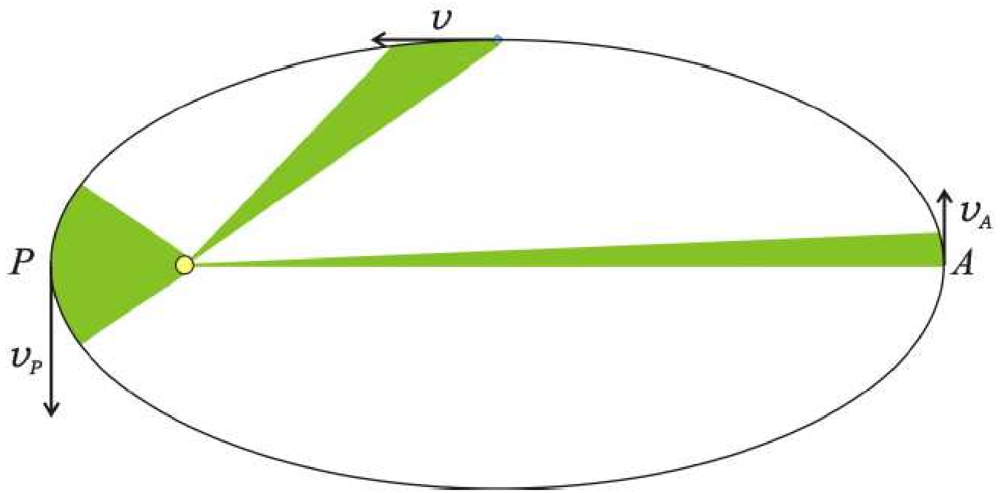
Viz QM, popis atomu

Pohyb v nehomogenním gravitačním poli – Keplerova úloha

1. Keplerův zákon

Planety obíhají kolem Slunce po elipsách, v jejichž jednom ohnisku leží Slunce.

2. Keplerův zákon



$$dS = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times d\vec{s}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right| dt = \frac{L}{2m}$$

$$v_p \equiv \frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = const.$$

Průvodič spojující Slunce s planetou opisuje stejné plochy za stejné časové intervaly.

3. Keplerův zákon

Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet je roven poměru třetích mocnin velkých poloos jejich trajektorií.

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

Pohyb v nehomogenním gravitačním poli – Keplerova úloha

2. K.Z.: obrácená úloha - pokud je plošná rychlost konstantní, co z toho plyne?

$$\vec{v}_P = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v} = \frac{\vec{L}}{2m} = konst \quad \text{tedy} \quad 0 = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v} + \vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r}\times\vec{a} = 0$$

$\Rightarrow$ zrychlení vždy $\vec{a} \parallel \vec{r}$

Závěr: **2. K. Z.** $\Leftrightarrow$ **síla je centrální** (leží na spojnici planety a slunce)

Úkol: odvoď 3. K. Z. pro kruhový pohyb

Pohyb v nehomogenním gravitačním poli – Keplerova úloha

1. KZ
odvození

(Následující odvození dráhy pohybu nebude vyžadováno ke zkoušce a výklad I. Keplerova zákona bude vyžadován pouze v přehledu). Vycházíme ze zákonů zachování energie a mom. hybnosti

Složky rychlosti dostaneme derivováním III dle času ; v polárních souřadnicích.

$$x = r\cos\varphi \qquad v_x = \frac{dr}{dt}\cos\varphi - r\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi \qquad (2.24)$$

$$y = r\sin\varphi \quad \rightarrow$$

$$z = 0 \qquad v_y = \frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi$$

Pro konstantní vektor b_0 z (2.23) dále platí (viz obr. 2.2)

$$L_3 = m(x_1 v_2 - x_2 v_1) \;; \quad L_3 \equiv b_0 = mrv\sin\alpha = mr^2\frac{d\varphi}{dt} = konst \qquad (2.25)$$

$$L_z = mr^2\dot{\varphi}$$

$$L_x, L_y = 0$$

Pro celkovou mechanickou energii platí dle (1.95) a (2.8)

$$E_M = E_0 = E_K + E_P = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\kappa mM}{r} = konst \qquad (2.26)$$

Dále platí z (2.24)

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \qquad (2.27)$$

$$p = m\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}$$

a tedy

$$E_0 = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] - \frac{\kappa mM}{r} \qquad (2.28)$$

$$E_0 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \kappa\frac{mM}{r^2}$$

Z rovnic (2.25) a (2.28) můžeme nyní určit závislosti $\frac{dr}{dt}$ a $\frac{d\varphi}{dt}$. Je

A hledáme: $r = r(\varphi)$

Pohyb v nehomogenním gravitačním poli – Keplerova úloha

Z rovnic (2.25) a (2.28) můžeme nyní určit závislosti $\frac{dr}{dt}$ a $\frac{d\varphi}{dt}$. Je

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{b_0}{mr^2} \qquad \text{zde} \quad b_0 \equiv L_3 \tag{2.29}$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2E_0}{m} + \frac{2\alpha}{mr} - \frac{b_0^2}{m^2r^2}} \tag{2.30}$$

kde jsme zavedli $\alpha = \kappa m M$.

Při řešení Keplerovy úlohy nás místo časových závislostí r(t) a φ(t) zajímá pouze dráha φ(r). Využijeme vztahu

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{dr}. \tag{2.31}$$

Dosadíme-li sem z (2.29) a (2.30), máme

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{b_0}{mr^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2E_0}{m} + \frac{2\alpha}{mr} - \frac{b_0^2}{m^2r^2}}} \tag{2.32}$$

Pohyb v nehomogenním gravitačním poli – Keplerova úloha

a polární úhel φ bude dán integrálem z pravé strany dle proměnné r. Jak se lze přesvědčit derivováním, je výsledkem integrace funkce

$$\varphi = \operatorname{arccos} \frac{\frac{b_0}{r} - \frac{\alpha m}{b_0}}{\sqrt{2mE_0 + \frac{\alpha^2 m^2}{b_0^2}}} + k \qquad (2.33)$$

zkraťme nyní zlomek výrazem $\frac{\alpha m}{b_0}$, kde bude

$$\varphi = \operatorname{arccos} \frac{\frac{b_0{}^2}{\alpha m r} - 1}{\sqrt{\frac{2E_0 b_0^2}{\alpha^2 m} + 1}} + k \qquad (2.34)$$

Označme ještě nyní

$$p = \frac{b_0^2}{\alpha m} \quad ; \quad p = \frac{b^2}{a} \qquad (2.35)$$

malá poloosa

(p není hybnost !) velká

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2E_0 b_0^2}{\alpha^2 m} + 1}$$

Pohyb v nehomogenním gravitačním poli – Keplerova úloha

(2.33) pak přejde na tvar

$$\varphi = \arccos\frac{\frac{p}{r}-1}{\varepsilon}+k \qquad (2.36)$$

$$\boxed{r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\left(\varphi - k\right)}}$$

(konec nepovinného odvození)

což je polární rovnice kuželosečky*. Zde veličina r udává vzdálenost bodu na kuželosečce od jednoho ohniska a úhel (φ-k) je úhlem, který průvodič svírá s osou kuželosečky procházející ohniskem. Pro určení charakteru kuželosečky je rozhodující parametr ε. Platí

*) s počátkem s.s. v ohnisku

$$\varepsilon < 1 \text{ .... elipsa} \qquad (2.37)$$

$$\varepsilon = 1 \text{ .... parabola}$$

$$\varepsilon > 1 \text{ .... hyperbola}$$

Podmínka (2.37) znamená dle (2.35)

$$\text{elipsa } E_0 < 0 \qquad (2.38)$$

$$\text{parabola } E_0 = 0$$

$$\text{hyperbola } E_0 > 0$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2E_0 b_0^2}{\alpha^2 m}+1}$$

$$p = \frac{b_0^2}{\alpha m}$$

$$\alpha = \kappa m M$$

$$\mathbf{b}_0 \equiv \mathbf{L}_3$$

Pohyb v nehomogenním gravitačním poli – Keplerova úloha

Omezíme -li se na $E_0 < 0$, je obsahem rovnice (2.36) 1. Keplerův zákon:

Planety obíhají kolem Slunce po elipsách, v jejichž jednom ohnisku leží Slunce.

Je-li $E_0 \geq 0$, není dráha hmotného bodu uzavřená a hmotný bod projde silovým polem pouze jednou. Nejmenší velikost rychlosti, kterou musí hmotný bod ve vzdálenosti r od centrální hmoty mít, aby mohl pole opustit, získáme z podmínky

$$E_0 = \frac{1}{2}mv^2 - \kappa\frac{mM}{r} = 0 \qquad (2.39)$$

$$v = \sqrt{\frac{2\kappa M}{r}}$$

Dosadíme-li sem hmotnost Země za M a poloměr Země R_z za r, dostaneme 2. kosmickou rychlost (rychlost k opuštění Země při startu ze zemského povrchu). Její hodnota je přibližně 11,2 km/s.

poloosy

$$a = -\frac{\alpha}{2E_0} = -\frac{\kappa m M}{2E_0}$$

$$b = \frac{L_3}{\sqrt{2|E_0|m}}$$

Velká poloosa určena celkovou energií E_0 tělesa

ot.: pokud při pohybu po elipse roste celková energie, roste nebo klesá velikost velké poloosy?

Pohyb v nehomogenním gravitačním poli – Keplerova úloha

Odvoďme (odvození opět nebude vyžadováno ke zkoušce) na závěr ještě vztah mezi dobou oběhu hmotného bodu a velikostí velké poloosy a tohoto pohybu. Součin plošné rychlosti a doby oběhu T musí být roven obsahu elipsy o poloosách a, b

$$T v_p = \pi ab \qquad (2.40)$$

Dosadíme-li sem z (2.23), máme

$$T b_0 = 2m\pi ab \qquad (2.41)$$

Z teorie kuželoseček vyplývá, že v případě elipsy je parametr p roven $\frac{b^2}{a}$.

Dosadíme-li za p z (2.35), máme

$$b = b_0 \left(\frac{a}{\alpha m}\right)^{1/2} \qquad (2.42)$$

Dosadíme nyní do (2.41) a rovnici upravíme

$$T b_0 = 2m\pi a b_0 \left(\frac{a}{\alpha m}\right)^{1/2} \qquad (2.43)$$

$$T = 2\pi m^{1/2} a^{3/2} \alpha^{-1/2}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m a^3}{\alpha}$$

3. Keplerův zákon:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa M} = konst.$$

Pozn. Pokud hmotnost m_1 obíhajícího tělesa není zanedbatelná vůči hmotnosti m_2 centrálního tělesa – viz problém dvou těles … obě tělesa obíhají po elipsách

Pohyb v nehomogenním gravitačním poli – Keplerova úloha

Úloha - **3. Keplerův zákon -** pro tělesa *srovnatelné hmotnosti* při oběhu po kružnicích

Tělesa se pohybují kolem společného hmotného středu ve vzdálenostech r_A a r_B, kde
$r_A + r_B = r$

Dostředivá síla $F_d = mr\omega^2$ se rovná gravitační, tedy:

$$m_A r_A \frac{4\pi^2}{T^2} = \kappa \frac{m_A m_B}{r^2}, \quad m_B r_B \frac{4\pi^2}{T^2} = \kappa \frac{m_A m_B}{r^2}$$

První rovnici zkrátíme m_A , druhou m_B a sečteme je:

$$r \frac{4\pi^2}{T^2} = \kappa \frac{m_A + m_B}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \text{3.KZ:} \quad \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\kappa\left(m_A + m_B\right)}}$$

Známe-li vzdálenosti, umožňují uvedené vztahy vypočítat hmotnosti těles,
např. hmotnost měsíce, ze známé hmotnosti země, vzdálenosti a času oběhu:

$$M_M = \frac{4\pi^2 r^3}{\kappa T^2} - M_Z$$

Zde však pozor – odečítáme dvě blízké hodnoty lišící se o ~1% → značná nepřesnost

Garvitační pole Země

Hmotnost Z, S, planet, hvězd:

- z gravitačního zrychlení: $a_g = \kappa \frac{M_Z}{R_Z^2}, \quad M_Z = a_g R_Z^2 / \kappa = 5.98 \times 10^{24} kg$

- z oběžných dob (měsíců, satelitů, planet kolem centra), 3.KZ $\Rightarrow \quad M = 4\pi^2 R^3 / \kappa T^2$

- a jak určit hmotu měsíce, pokud neznáme vzdálenosti ani oběžné doby?

Vzdálenosti ve vesmíru:

- 3. KZ: $T^2 / a^3 = konst$ … je třeba znát referenční vzdálenost (např. Z–S)
přechod Venuše přes S - sluneční paralaxa, trigonometrie – rozdíl počátků a konců přechodu z různých míst na Z, (8-105-123 let), 1.předpověď Keppler, Halley, Cook (1769 Point Venus, Tahiti)

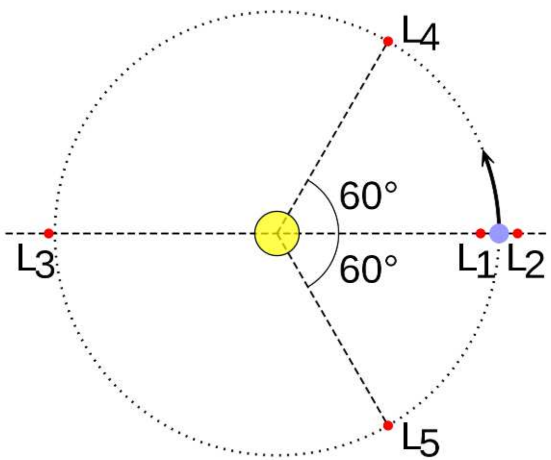
- vesmírné sondy, radar, laser, dalekohled

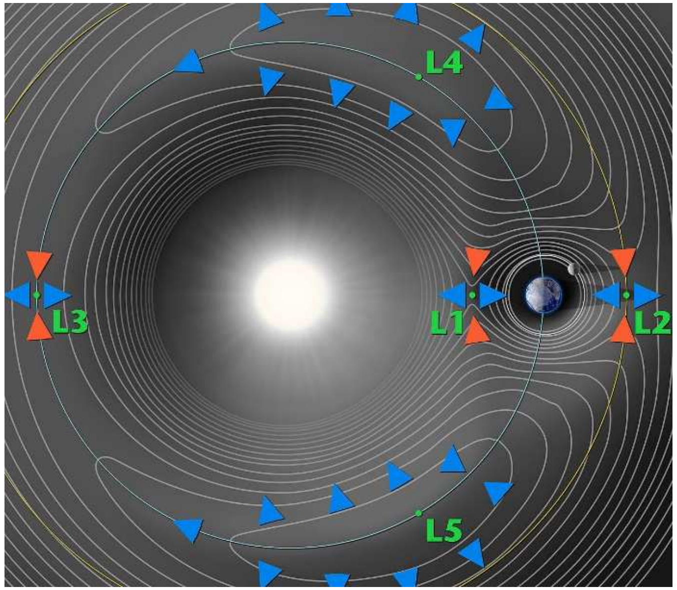
- extrasolární planety (z měření vlastního pohybu hvězdy, Dopplerova jevu vlivem radiálního pohybu)

- paralaxa – vzdálenosti blízkých hvězd, družice Gaia v L2

Lagrangeovy body - liberační centrum

Librační centrum (**Lagrangeův bod**, 1772) – body v soustavě tří těles (slunce S, planeta Z, těleso) rotujících kolem společného těžiště, v němž se vyrovnávají gravitační a odstředivé síly působící na třetí (relativně lehké) těleso tak, že toto těleso umístěné v daném bodě nemění vůči soustavě svou polohu vůči S a Z: v bodech L1 (L2 a L3) snižuje (zvyšuje) Z grav.působení S a oběh tělesa se synchronizuje s oběhem Z.
Centra L1 a L2 soustavy S-Z lze využít pro umístění družic pro pozorování Slunce nebo vesmíru (teleskop Jamese Webba v L2). Jsou vzdálena asi 1,5 milionu km (0,01 au) od Země.
Poloha tělesa je stabilní pouze v bodech L4 a L5 (těleso má při výchylce tendenci kolem těchto bodů oscilovat). V reálu je jejich stabilita omezená (vlivem působení dalších planet), relativně stabilní je pouze u Jupitera (zachycené planetky).
Body L1, L2 a L3 jsou v rovině oběhu nestabilní i při malé výchylce od ideální polohy, lze však najít skloněné polostabilní „halo“ dráhy kolem těchto bodů (využívané k umisťování družic).

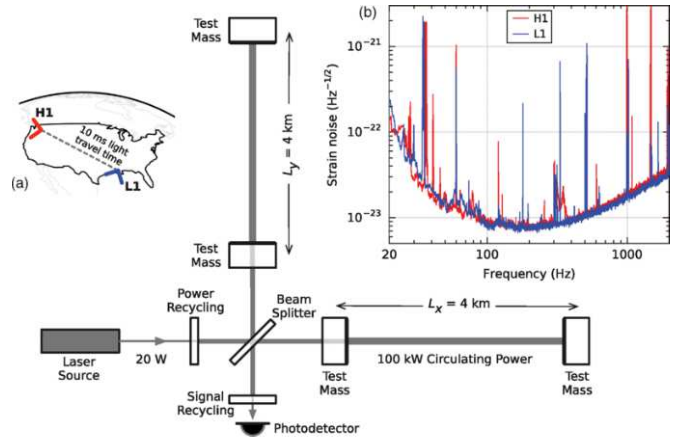


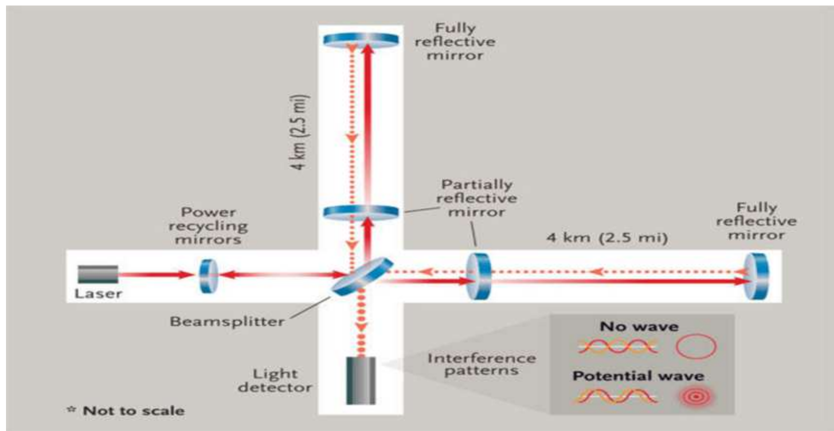


Gravitační vlny

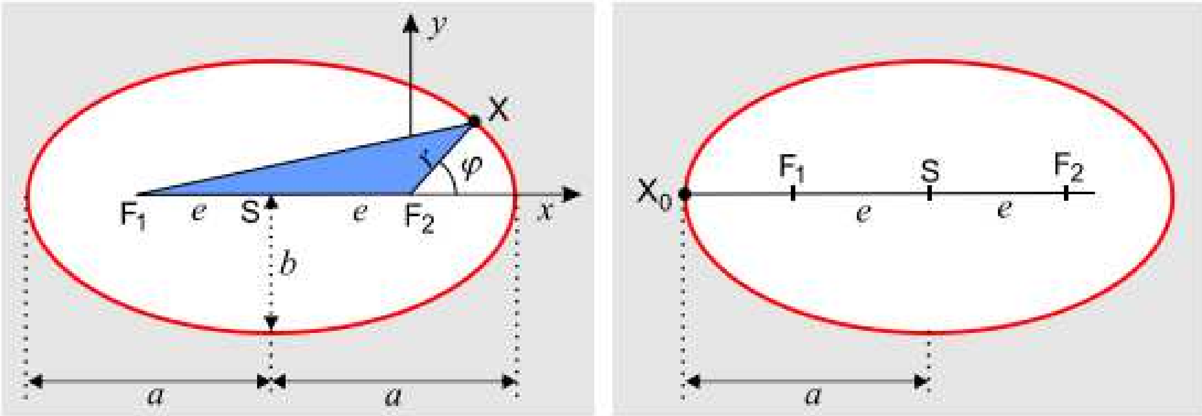
Zdroj g.v. – vzájemný pohyb těles (srážky černých děr, neutronových hvězd, výbuchy supernov)

Detekce – interferometr LIGO, 2015





Doplněk: **rovnice elipsy** v polárních souřadnicích se středem v jednom z ohnisek (F2)



Elipsa je definována jako množina bodů, pro které je součet vzdáleností od dvou pevně daných bodů (ohnisek F_1 a F_2) konstantní, tj.

$$XF_1 + XF_2 = \text{const} . \tag{9.1}$$

Hodnotu konstanty snadno určíme pro bod $X = X_0$, který je situovaný podle pravého obrázku:

$$X_0F_1 + X_0F_2 = (a - e) + (a + e) = 2a .$$

Rovnice elipsy tedy bude mít tvar:

$$XF_1 + XF_2 = 2a , \tag{9.2}$$

kde X je libovolný bod na elipse. Jednotlivé body mají podle obrázku souřadnice:

$$\begin{aligned} X &= (r\cos\varphi, r\sin\varphi) ; \\ F_1 &= (-2e, 0) ; \\ F_2 &= (0, 0) . \end{aligned} \tag{9.3}$$

Souřadnice bodů nyní dosadíme do rovnice elipsy, vzdálenost dvou bodů vyjádříme jako odmocninu ze součtu kvadrátů rozdílů souřadnic:

$$\mathsf{XF}_1 + \mathsf{XF}_2 = 2a \qquad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(r\cos\varphi + 2e)^2 + (r\sin\varphi)^2} + \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} = 2a \qquad \Rightarrow$$

$$\sqrt{r^2 + 4re\cos\varphi + 4e^2} \;+\; r = 2a\,.$$

To, že druhá vzdálenost musela vyjít r, je na první pohled patrné z obrázku. Ve výsledném vztahu ponecháme na levé straně jen odmocninu (člen r převedeme doprava) a obě strany umocníme na druhou:

$$\sqrt{r^2 + 4re\cos\varphi + 4e^2} = 2a - r \qquad \Rightarrow$$

$$r^2 + 4re\cos\varphi + 4e^2 = 4a^2 - 4ar + r^2 \qquad \Rightarrow$$

$$re\cos\varphi + e^2 = a^2 - ar \qquad \Rightarrow$$

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a + e\cos\varphi} = a\frac{1-(e/a)^2}{1+(e/a)\cos\varphi}\,.$$

Rovnice elipsy se většinou píše ve tvaru:

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}\,;$$

$$p \equiv a(1-\varepsilon^2)\,, \qquad p = b^2/a \qquad (9.4)$$

$$\varepsilon \equiv e/a\,.$$

Veličiny p, ε se nazývají parametr elipsy a numerická (bezrozměrná, číselná) excentricita.