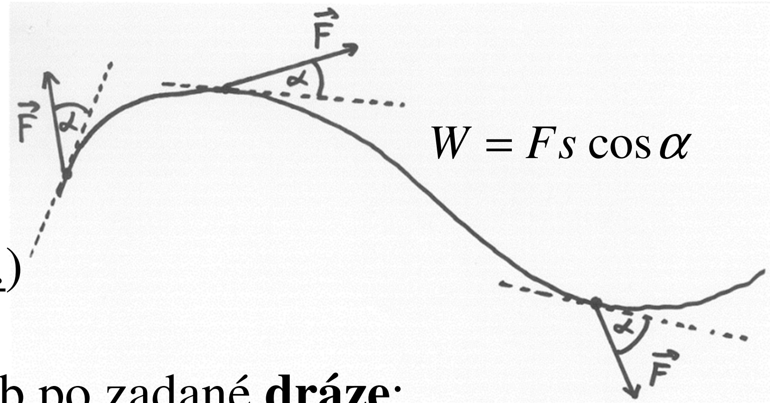
3. Energie a pohyb v silovém poli

Anotace:

3. Energie a pohyb v silovém poli.

Práce, výkon, kinetická energie. Konzervativní pole, intenzita a potenciál, centrální síla, lineární harmonický oscilátor, potenciální energie. Nekonzervativní síly, tření. Gravitační zákon. Pohyb v gravitačním poli, Keplerovy zákony.

Práce



<u>Účinek síly</u> – popis :

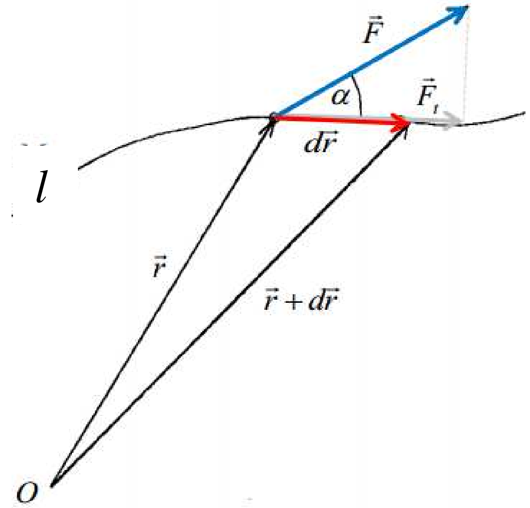
- podle dráhy, na níž síla působila na h.b. (<u>dráhový účinek síly</u>)
- podle doby, po kterou síla působila (<u>časový účinek s.</u>)

<u>Práce</u><u>:</u> úhrnné působení síly na h.b., který vykonal pohyb po zadané **dráze**:

$$W = \vec{F}\cdot\vec{s} \rightarrow \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k\Delta\vec{s}_k \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\ell}\vec{F}\cdot d\vec{s}, \quad \text{kde } d\vec{s} = ds\cdot\vec{\tau} = d\vec{r}$$

***W* - *s*kalární veličina, závisí na počátečním a koncovém bodě a na tvaru dráhy a působící síle**

$$\boxed{W = \int_{l}\vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{A}^{B} F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3} \qquad \text{[J, eV]}$$



Integrál po dráze *l* (*křivkový integrál 2. druhu*), lze vypočítat, známe-li průběh integrované fce po dané dráze

Elementární práce: $\boxed{dW = F_1dx_1 + F_2dx_2 + F_3dx_3}$

práci koná pouze tečná složka, tj. ve směru pohybu (ot.: a co kolmá složka,např F_d, F_c?)

Práce

Výpočet křivkového integrálu: křivku zadáme parametricky (parametrem je např. čas)

Křivkový integrál 2. druhu – integrál vektorové funkce přes vektorový element

$$I_2 = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad \text{vekt.element: } d\vec{s} = (dx_1, dx_2, dx_3) = \left(\frac{dx_1}{dt} dt, \frac{dx_2}{dt} dt, \frac{dx_3}{dt} dt \right) = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right) dt$$

Zapamatujte si:

– Mechanická práce je integrálem $\boxed{W = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3}$

– Integrál se počítá po křivce, po níž se pohybuje těleso. Křivku zadáme parametricky, vypočteme diferenciály d*x*, d*y*, d*z*, a tím převedeme integraci na standardní integrál s určitými mezemi.

Křivkový integrál 1. druhu – integrál skalární funkce přes skalární element

$$I_1 = \int_l f \cdot ds \qquad \text{skalární element: } ds = \sqrt{d\vec{s} \cdot d\vec{s}} = \sqrt{\sum dx_i^2} = \sqrt{\sum \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2} dt$$

kde f může být např. délková hustota $\rho \rightarrow$ hmotnost drátu, (pokud $f = 1 \rightarrow$ délka křivky)

Práce

Zapamatujte si:

- Pokud chceme počítat křivkové integrály, musíme mít křivku zadanou parametricky.
- Pro křivku najdeme vektorový element $d\mathbf{s} = (dx, dy, dz)$ a skalární element $ds = \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)^{1/2}$.
- Integrál prvního druhu je integrál ze skalární funkce a skalárního elementu.
- Integrál druhého druhu je integrál ze skalárního součinu vektorové funkce a vektorového elementu.

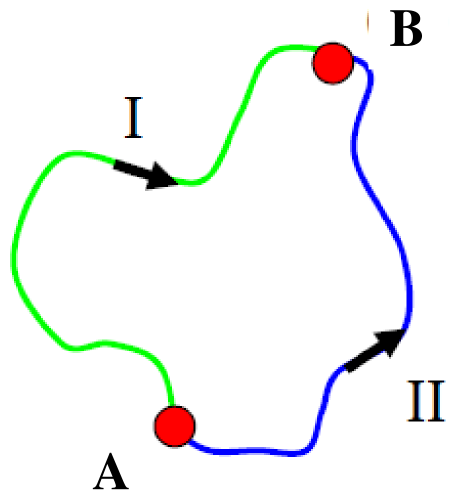
Př.: vypočtěte práci vykonanou gravitačními silami při vodorovném vrhu v homog.grav.poli (viz přednáška)

Př.: vypočtěte délku kružnice zadanou parametricky

Práce

Z vlastností integrálu plyne: $W_{AB} = -W_{BA}$ (po stejné dráze)

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



Konvence: $W > 0$, pokud síly urychlují pohyb, tj. zrychlení $a > 0$,
$W < 0$, pokud síly pohyb zpomalují, tj. $a < 0$,
$W = 0$, pokud tečná složka síly je 0, tj. $\boldsymbol{F} \perp$ k trajektorii

Další odvozené vztahy:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{\tau} \cdot ds = \vec{F} \cdot \vec{\tau} \cdot v dt = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{v} dt}$$

$\vec{v} = \vec{v}(t)$ - okamžitá rychlost

Výkon okamžitý: $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \to \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$

Kinetická energie

Míra schopnosti těles konat práci

Kinetická energie $\boxed{E_k = \frac{p^2}{2m}}$ $\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv^2}$

Vztah mezi prací a K.E.

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}dt = \frac{1}{2}md\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$W_{12} = \int_1^2 d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$$

připomenutí:

$\vec{v} = d\vec{r}/dt$ tj.

$d\vec{r} = \vec{v}\,dt$

$d\vec{r} \equiv d\vec{s}$

Užitečné obraty:

$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = 2\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}$

$\frac{d}{dt}\left(v\cdot v\right) = 2v\frac{dv}{dt}$

tj. $\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} = v\cdot\dot{v}$

Věta o přírůstku K.E.: práce vykonaná <u>všemi vnějšími silami</u> na h.b. přejde-li z bodu 1 do bodu 2 po dráze *s* = přírůstku K.E. h.b. (tj. rozdílu K.E. mezi body 2 a 1)

K.E. shrnutí:

- Skalární veličina - míra schopnosti těles konat práci, změna K.E. = práci vnějších sil
- Závisí na volbě s.s.
- Znaménková konvence: pokud síly pohyb podporují $dE_k = dW > 0$, přírůstek K.E. je kladný a naopak při brzdění $dE_k = dW < 0$ (práce brzdných sil)
- Změna E_k umožnňuje určit práci, aniž bychom znali detailní průběh sil $F_i = f(t, x_i, \dots)$ – **první integrál pohybu**, (QM: viz atom – nelze určit F, v, r, ale známe energie a orbitální momenty)
- Pamatujte: práce se koná pouze při pohybu <u>po dráze</u>, $\Delta s \neq 0$

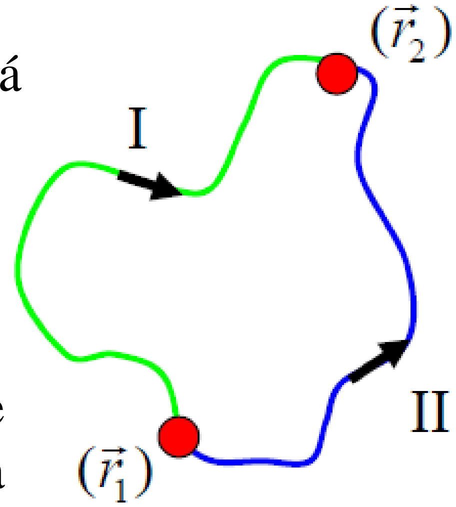
Energie a konzervativní síly

Silové pole - např. gravitační pole, elmg. pole, napěťové pole v materiálu …

- vektorové pole
- určuje sílu v každém bodě prostoru

Konzervativní silové pole (pole konzervativních sil) též **potenciálové pole**:

- Práce závisí pouze na počáteční a koncové poloze tělesa, nezávisí na cestě → **konzervativní síly**
- Důsledek – práce vykonaná po libovolné uzavřené křivce je nulová



$$\left(W_{12}\right)_I = \left(W_{12}\right)_{II} \qquad \boxed{W = \oint_{\ell} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0}$$

Obrácené tvrzení: pole je konzervativní právě tehdy, pokud práce vykonaná mezi dvěma body nezávisí na cestě, ale pouze na počáteční a koncové poloze tělesa

Příklady:
Konzervativní: gravitační pole, elektrostatické pole, elastické síly
Nekonzervativní (disipativní): síly tření (odpor prostředí), magnetické pole

Další charakteristiky konz.pole: při pohybu po lib.uzavřené křivce je $E_{k\_poč} = E_{k\_konc}$
a zároveň v okolí nedošlo k žádným změnám

$\nabla \times \mathbf{F} \equiv \mathrm{rot}\,\mathbf{F}$

Pozn.: rot grad $f \equiv \nabla \times (\nabla \cdot f) = 0$, tedy $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ … diferenciální charakteristika konz.pole

Potenciální energie

Potenciální energie:

Pokud práce závisí pouze na poloze počátečního a koncového bodu, můžeme zavést odpovídající veličinu závislou na poloze – **potenciální (konfigurační, polohová) energie**, E_p:

$$\boxed{-W_{12} = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = E_{p2} - E_{p1} = \Delta E_p}$$

Rozdíl potenciálních energií mezi 2 libovolnými body *konzervativního pole* je roven záporně vzaté práci vykonané vnějšími silami na tento bod.

Pozn.

P.E. lze zavést **jen pro konzervativní pole**, jinak bychom po různých drahách dostávali různé hodnoty E_p ($\Rightarrow$ perpetuum mobile I. druhu, neplatí Z.Z.E.)

P.E. je určena až na aditivní konstantu (význam má pouze rozdíl P.E.)

Př. konz.polí: homogenní pole, centrální pole - gravitační pole, elektrické pole, elastické síly
Názorný př.: svislý vrh v hom.grav. poli, pružina

Př.: vypočtěte E_p:

tíhového pole	$F = - mg$	$E_p = mgh$
elastické pružiny	$F = - kx$	$E_p = kx^2/2$
centrálního pole	$F = - \kappa mM/r^2$	$E_p = - \kappa mM/r + C$

Zákon zachování mechanické energie

Celková práce konaná <u>konzervativním</u> polem při přemístění tělesa z bodu 1 do bodu 2:

při změně K.E.: $W_{12} = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$

při změně P.E.: $W_{12} = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p,$ tedy

Tedy $\Delta E_k = -\Delta E_p$ tj. $\boxed{E_{k2} + E_{p2} = E_{k1} + E_{p1} = konst.}$

Zákon o zachování mechanické energie: pohybuje-li se h.b. v *<u>konzervativním</u>* silovém poli, součet jeho kinetické a potenciální energie je konstantní.

$$\boxed{E_k + E_p = konst}$$

Pozn. platí pro libovolný **izolovaný** systém

Vsuvka – fce více proměnných

$$f = f\left(x, y, z, ..., t\right)$$

Diferenciál fce 1 proměnné: $df = f'dx = \frac{df}{dx}dx$

a více proměnných: $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt$

Úplná derivace: $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$

neboli: $\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial f}{\partial t}$ tedy: $\frac{df}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f + \frac{\partial f}{\partial t}$

Parciální derivace: $\frac{\partial f}{\partial x}$ př.: $f = \frac{x^2 y}{z} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy}{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{x^2 y}{z^2}$

Intenzita a potenciál

Diferenciál (**úplný, totální**) potenciální energie – analytické vyjádření:

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial E_p}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial E_p}{\partial x_3}dx_3 \equiv \sum \frac{\partial E_p}{\partial x_i}dx_i \qquad \text{tj.} \quad \boxed{dE_p = \vec{\nabla} E_p \cdot d\vec{r}} \qquad (*)$$

$$dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \; = -\left(F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3\right) \equiv -\sum F_i dx_i$$

def: $\vec{\nabla} E_p \equiv \left(\frac{\partial E_p}{\partial x_1}, \frac{\partial E_p}{\partial x_2}, \frac{\partial E_p}{\partial x_3} \right)$

$$\boxed{F_i = -\frac{\partial E_p}{\partial x_i}}$$

i=1,2,3 vektorově: $\boxed{\vec{F} = -\nabla E_p \equiv -\mathrm{grad} E_p}$

vztah mezi složkami síly a parciálními derivacemi E_p (fyzikálně - přírůstek E_p ve směrech jednotlivých os souřadnic)

Vektorový operátor nabla: $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$

- Působí na skalární funkci … gradient
- Převádí skalár → vektor
- Fyz. smysl: určuje ***směr největšího vzrůstu*** skalární fce, určuje směr síly (intenzity)

Intenzita pole: $\boxed{\vec{I} = \frac{\vec{F}}{m}}$

Intenzita ***I*** - síla působící v silovém poli na h.b. o jednotkové hmotnosti; charakterizuje silové pole v každém místě prostoru, rozměr - zrychlení

Potenciál: $\boxed{\varphi = \frac{E_p}{m}}$

Potenciál φ - potenciální energie h.b. o jednotkové hmotnosti, skalár, rozložení φ určuje silové pole, např**. je-li φ = konst., je síla nulová**

Analogicky: $\boxed{I_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}$ $\boxed{\vec{I} = -\nabla \varphi}$ (*) ⇒: $\boxed{\begin{aligned} dE_p &= \nabla E_p \cdot d\vec{r} \\ d\varphi &= \nabla \varphi \cdot d\vec{r} \end{aligned}}$

E_p, φ - skalární pole

Shrnutí: konzervativní pole

a) jsou **potenciálová**, tj. jejich intenzita může být vyjádřena pomocí gradientu skalární funkce (zvané **potenciál** silového pole)

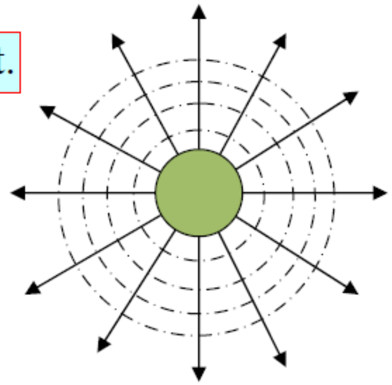
$$\boxed{\vec{I} = -\nabla\varphi \equiv -\mathrm{grad}\,\varphi}$$

b) jsou **stacionární**, tj. síla ani potenciál silového pole nezávisí na čase, ale pouze na poloze

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) \qquad \varphi = \varphi(\vec{r})}$$

<u>Ekvipotenciální plocha:</u>

plocha konstantního potenciálu $\varphi(x, y, z) = \text{konst.}$



$$\boxed{\begin{aligned} dE_p &= \nabla E_p \cdot d\vec{r} \\ d\varphi &= \nabla\varphi \cdot d\vec{r} \end{aligned}}$$

když $dE_p = 0$, pak $\nabla E_p \perp d\vec{r}$

tj. gradient je kolmý k

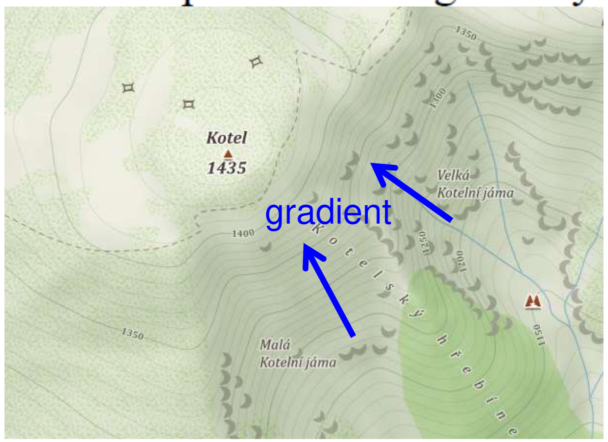
ploše konst.hodnoty

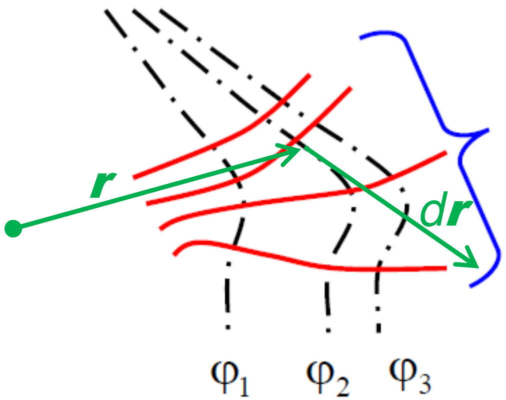
<u>Siločáry:</u>

mají **směr normály k ekvipotenciální ploše**

tyto křivky se vzájemně neprotínají

můžeme pomocí nich graficky znázornit velikost intenzity pole





siločáry

gradient - směr největšího růstu skalární fce

Potenciální energie – rovnováha

Rovnováha:

- Minimum P.E. – rovnovážná / stabilní poloha:
  – k vychýlení kterýmkoliv směrem je potřebná energie
  – při malém vychýlení kterýmkoli směrem začnou působit **síly proti směru pohybu** a vrací h.b. do minima E_p
  $\rightarrow$ **síla směřuje vždy k minimu E_p**,
  $\rightarrow$ **základní stav** – stav s nejnižší hodnotou E_p,

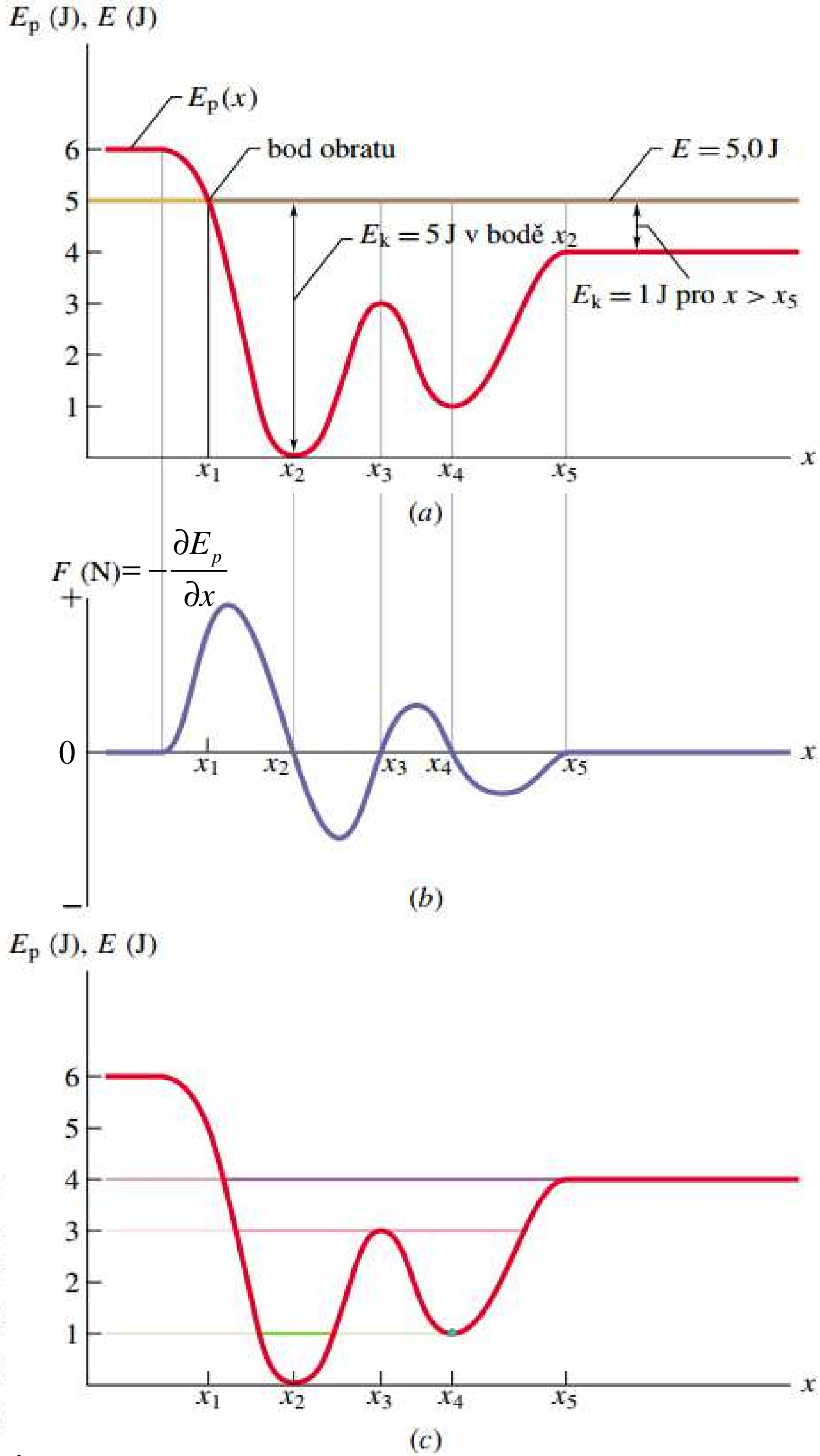
$$\boxed{F_i = -\partial E_p / \partial x_i} \qquad \boxed{\partial E_p / \partial x = 0, \quad \partial^2 E_p / \partial x^2 > 0}$$

- Je-li P.E. (potenciál) konstantní, nepůsobí žádné síly, h.b. se může nacházet v lib. místě – volná poloha (degenerovaný stav)

$$\boxed{\partial E_p / \partial x = 0, \quad \partial^2 E_p / \partial x^2 = 0}$$

- Maximum P.E. – nestabilní poloha:
  – při malém vychýlení kterýmkoli směrem začnou působit síly *ve směru* pohybu, h.b. se pohybuje směrem k nižší E_p

$$\boxed{\partial E_p / \partial x = 0, \quad \partial^2 E_p / \partial x^2 < 0}$$



Obr. 8.10 (a) Graf závislosti potenciální energie $E_p(x)$ soustavy na poloze částice, která se pohybuje po ose x. Částice náleží do soustavy. Nepůsobí-li v soustavě třecí síly, zachovává se její mechanická energie. (b) Graf závislosti síly $F(x)$, působící na částici, na její poloze. Graf je konstruován z hodnot směrnic tečen ke křivce $E_p(x)$ v různých bodech. (c) Graf $E_p(x)$ s vyznačením tří různých hodnot energií E.

Úkol: popište pohyb při E = 1J, 3J, 4J na obr.(c)

Potenciální energie

Zapamatujeme si:

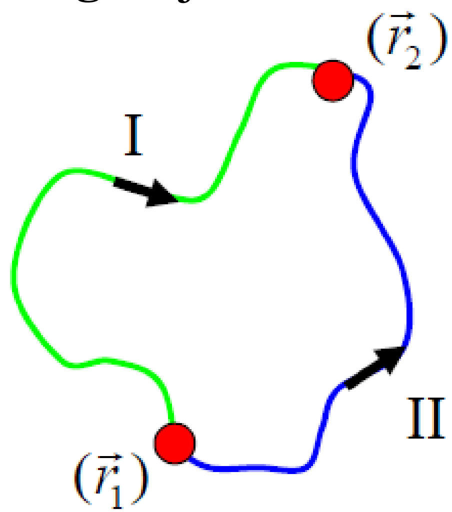
- <u>Konzervativní</u> silové pole je nazýváme takové pole, pro které <u>existuje potenciální</u> energie a sílu lze vyjádřit jako záporně vzatý gradient potenciální energie.
- Síla míří vždy <u>do minima potenciální energie</u>.
- Mechanická <u>práce v konzervativním</u> poli závisí jen na <u>koncovém a počátečním</u> bodě, nikoli na tvaru křivky.

Poznámky:

- Všechny síly mezi částicemi na základní úrovni jsou konzervativní.
- V okolí minima potenciální energie můžeme očekávat kmitavý pohyb, neboť síla vždy míří do minima, těleso setrvačností minimum prolétne a začne na něho působit vratná síla. Pokud má minimum parabolický průběh, hovoříme o tzv. harmonických oscilacích, viz kapitola Kmity.
- <u>Potenciální energie</u> nemusí k danému silovému poli vždy existovat, tj. nemusí se nám podařit nalézt takovou funkci, aby síla byla jejím záporně vzatým gradientem. Mezi silová konzervativní pole patří například tíže, gravitace, elektrostatické pole, napěťové pole. Naopak tření není konzervativní silou.

Nekonzervativní síly

Nekonzervativní (též disipativní) síly – dochází k **disipaci (rozptylu) energie**, tj. k přeměně mechanické energie na jiné formy energie, např. na "teplo"
př.: tření, odporové síly… ***F* = *F**(*r*,*v*,*t*)**



Pokud působí i nekonzervativní síly: $W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$
tj. na zač. a konci uzavřené dráhy se hodnota K.E. liší, neplatí ZZME

Pro disipativní síly (síla působí × pohybu): $W^* = \oint \vec{F}^* \cdot d\vec{r} < 0$

Celková práce 1→2 : $W = W_{12} + W_{12}^* = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_1^2 \vec{F}^* \cdot d\vec{r} = \Delta E_k$

Pro konz. síly je: $W_{12} = -\Delta E_p$

tedy: $\Delta E_k = -\Delta E_p + W_{12}^*$

a celk změna energie: $\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = W_{12}^*$

(po uzavřené dráze $\Delta E_p = 0$ a $\Delta E_k = W^*_{12}$ tj. hodnota K.E. na začátku a na konci uzavřené dráhy se liší !)

Shrnutí:

a) Práce **nekonzervativních** sil je rovna celkové změně mechanické energie,
b) Neplatí zákon zachování *mechanické* energie
c) pozn. Je-li na počátku i na konci uzavřené dráhy K.E. stejná, pak působící síly jsou konzervativní
d) pozn. Vazbové síly nekonají práci (reakce podložky, napětí vlákna …)
e) pozn. Věta o přírůstku kin. energie na str. 6 platí pro všechny druhy sil (konz, nekonz, …)

Potenciální energie

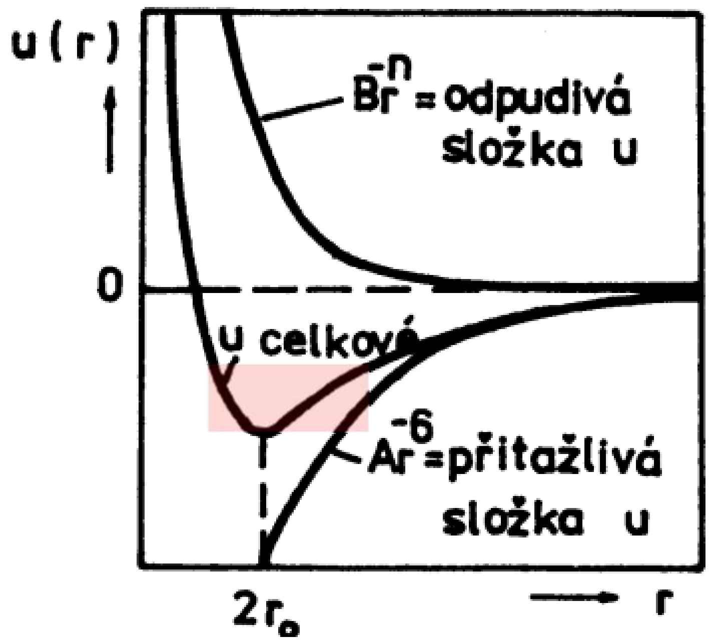
Všechny základní síly v přírodě, tj. ***síly mezi částicemi na základní úrovni, jsou konzervativní***

Působení více konz.sil najednou → E_p je dána součtem P.E. od všech sil působících v soustavě, aditivní funkce (⇐ princip superpozice)

Interakce většího počtu těles:

P.E. přísluší vždy soustavě všech objektů - definována pomocí práce všech interakčních sil, tzv. **konfigurační energie**

$$E_p = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{N} E_p^{ij}$$



Obr.: silové působení na molekulární (atomární) úrovni, u ≡ P.E.

Pozn.: viz Halliday, kap. 8
- hmota a energie
- kvantování energie