2. Dynamika hmotného bodu

Anotace:

2. Dynamika hmotného bodu.
Newtonovy zákony. Síly působící při známém druhu pohybu. Pohybová rovnice hmotného bodu, vrhy, harmonický pohyb. Inerciální a neinerciální soustavy souřadné, zdánlivé síly, síla Coriolisova a odstředivá.

- Dynamika zkoumá **příčiny pohybu a vzájemné působení těles**, které vede k pohybu

- Nová veličina: **síla, *F*** [N]**,** vektorová veličina, je mírou vzájemné interakce (působení) těles, která vede ke změnám pohybu nebo deformaci

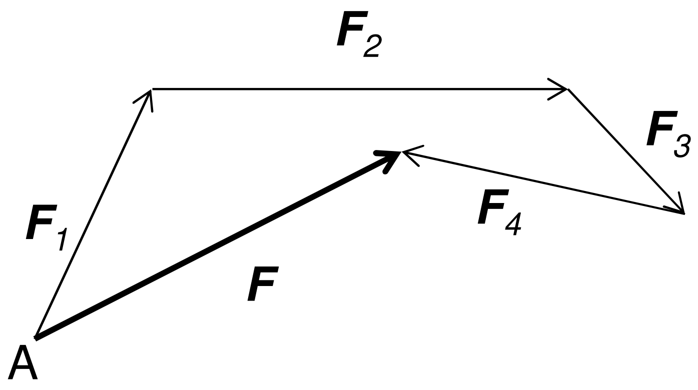
- Pohyb je důsledkem vzájemného působení těles – projevuje se silami

- Síly **skutečné (pravé)** – vyvolané vzájemným působením těles
  Síly **setrvačné** („zdánlivé“) – vyvolány zrychleným pohybem vztažných soustav

Síla

- Pokus s pružinou: …

Skládání sil – **princip superpozice**: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4$



- Síla je určena **velikostí**, **směrem** a **působištěm** (vektor vázaný na bod)
- Pohybové účinky několika současně působících sil jsou stejné jako účinek jediné síly dané jejich vektorovým součtem (plyne ze zkušenosti)

Síla – základní druhy silových interakcí

gravitační interakce $F \sim mM / r^2$

(projevuje se univerzálně mezi všemi typy hmotných objektů)

elektromagnetická interakce $F \sim Q_1 Q_2 / r^2$

(předpokladem je existence el.náboje)

slabá interakce

(projevuje se u všech typů elementárních částic)

silná interakce

(má souvislost s jadernými silami)

Typ interakce	Dosah [m]	Relativní síla
gravitační interakce	∞	10^{-38}
elektromagnetická interakce	∞	10^{-2}
slabá interakce	10^{-18}	10^{-13}
silná interakce	10^{-15}	1

Newtonovy zákony – elementární formulace (středoškolská)

1. **Zákon setrvačnosti** (Galileo)**:** Každé těleso setrvává ve stavu klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, není-li vnějšími silami (tj. působením jiných těles) nuceno tento stav změnit.

2. **Zákon síly:** Síla působící na těleso je úměrná součinu jeho hmotnosti a zrychlení, které mu uděluje

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

3. **Zákon akce a reakce**: Vzájemná silová působení dvou <u>různých</u> těles jsou stejně veliká a opačně orientovaná

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

   (Každá akce vyvolává okamžitou stejně velkou reakci opačného směru)

Pozn: síly akce a reakce působí mezi <u>**různými**</u> tělesy, přitom nezávisí na způsobu, jakým na sebe tělesa působí nebo zda se pohybují.

Pozn.: rovnice $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ zavádí 2 nové veličiny, F a m, a kromě toho ani nevíme, vůči jaké s.s. máme $\boldsymbol{a}$ odečítat

Setrvačnost – odpor proti změně pohybového stavu, m = setrvačná hmota

Newtonovy zákony - důsledky

- 1. zákon určuje **inerciální soustavy**, jedná se o celou třídu s.s., vůči nimž je volný *h.b.* v klidu nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře. V těchto soustavách měříme zrychlení!
- 2. zákon umožňuje **stanovit hmotnosti** těles (způsob měření hmotnosti)

$$F = m_1 a_1 = m_2 a_2 \quad \text{tedy pro velikosti:} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

m - **hmotnost setrvačná**

- Tímto je definována síla ***F*** na levé straně pohybové rovnice, stačí zvolit referenční hmotnost (etalon)

Hybnost: $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$ (charakterizuje okamžitý pohybový stav tělesa – míra pohybového stavu)

Původ sil?
Definice síly?

Newtonovy zákony – základní formulace

1. **Zákon setrvačnosti** (definice ISS)**:** Nepůsobí-li na těleso vnější fyzikální vlivy (tj. žádné pravé síly, popř. výslednice pravých sil je nulová - tzv. volná částice), pak soustava souřadná, vůči níž je těleso v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, je **soustava inerciální.**

2. **Zákon síly:** časová změna hybnosti tělesa je rovna výslednici vnějších sil, které na těleso působí
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

3. **Zákon akce a reakce**: Vzájemná silová působení dvou <u>různých</u> těles jsou stejně veliká a opačně orientovaná,
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Galileův princip relativity:
Zákony mechaniky mají stejný tvar ve všech inerciálních souřadných soustavách

- Z hlediska klasické mechaniky jsou všechny inerciální soustavy **rovnocenné**, tj. žádná s.s. není privilegovaná (žádným fyzikálním pokusem nelze najít privilegovaný systém, libovolný pokus dá ve všech *i.s.s.* stejný výsledek)

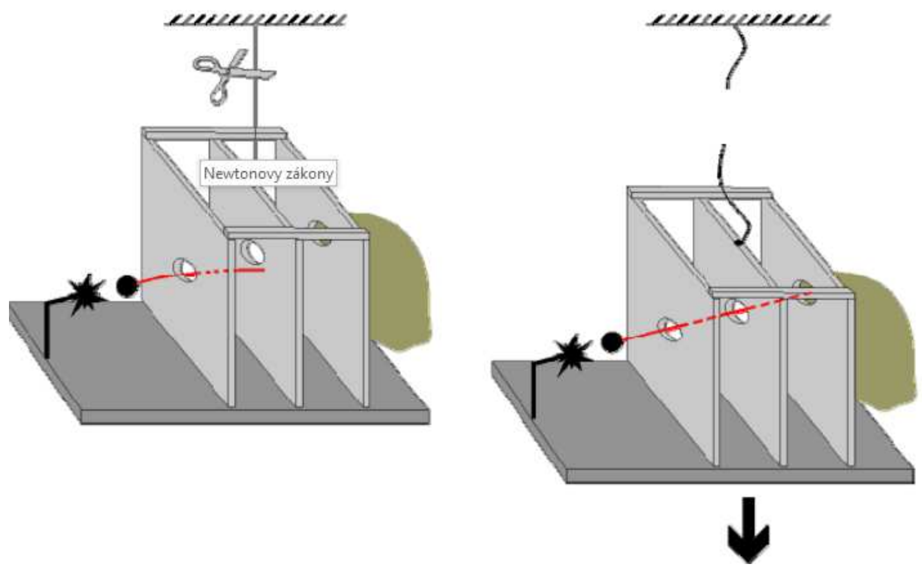
- V Newtonovské mechanice jsou prostor a čas absolutní veličiny (nezávisí na pozorovateli, na pohybu); hmotnost *m* je konstanta nezávislá na volbě s.s.

Inerciální s.s.

Realizace ISS:

- Vezmeme si dostatečně tuhé tyče opatřené měřícími ryskami a svaříme z nich tři navzájem kolmé měřící osy.
- Kam ji ale umístíme? Abychom získali *ideální inerciální soustavu*, museli bychom ji umístit velmi daleko od všech těles, ve které se tělesa budou pohybovat konstantní rychlostí po přímkách.
- Takový ideál ale neexistuje - nikdy nemůžeme být dostatečně daleko od všech těles.
- Lokálně inerciální soustava, LIS: $\Sigma \boldsymbol{F} = 0$ platí v omezeném prostoru.
  Pokud se s vámi v mrakodrapu utrhne výtah a poletíte volným pádem k zemi, nezoufejte. Na malou chvíli zažijete skutečný inerciální systém, tzv. volně gravitující klec neboli LIS. Pozn. naše souřadnicová soustava musí být ale lokální („malá“) v prostoru i v čase.

Experimentu Harolda Waaga



Př. inerciálních soustav:
- spojené se stálicemi ?
- satelit na oběžné dráze ?
- padající výtah v homogenním gravitačním poli ? → LIS

Newtonovy zákony

Síly, o kterých se v Newtonových zákonech hovoří, jsou tzv. **silami pravými** (skutečnými). Tyto síly mají svůj původ ve **vzájemném působení** hmotných objektů, řídí se **principem akce a reakce** a **principem superpozice**

Předpokládá se, že síla vyvolaná hmotným bodem α působí na bod β **okamžitě** a že tyto síly jsou silami **centrálními**, tj. že působí podél spojnice bodů α a β.

Newtonovy zákony platí pouze **pro tělesa, která můžeme nahradit modelem hmotného bodu.**

Na tělesa mohou působit i tzv.**zdánlivé síly**, které jsou vyvolány zrychleným pohybem vztažných soustav a které jsou nulové pouze v tzv. **inerciálních** souřadných soustavách

Síly při různých druzích pohybu

$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$

prp: … F = 0, *przp*: *F* = *konst.* (~ *m*)

Harmonický pohyb: $\boldsymbol{F} = -m\omega^2(x - x_0) = -k\Delta x, \quad k = m\omega^2$

Rovnoměrný kruhový pohyb: $\boldsymbol{F}_\mathrm{d} = -m\omega^2\boldsymbol{r}_0 = -m\omega^2 R\boldsymbol{r}_0/|\boldsymbol{r}_0|$

Nerovnoměrný kruhový pohyb: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_\mathrm{t} + \boldsymbol{F}_\mathrm{d} = m\boldsymbol{a}_t + m\boldsymbol{a}_n$

Tíhová síla: $\boldsymbol{G} = m_G\boldsymbol{g}$, tíhové zrychlení g = 9,80665 ms^{-2} (přesně)

- všechna tělesa padají se **stejným zrychlením** (Galileo), tj. $\boldsymbol{G} \sim m_G$
- tíhová hmota, 3.N.Z.: $\boxed{\dfrac{m_{1G}}{m_{2G}} = \dfrac{G_1}{G_2}}$

princip ekvivalence: $\boldsymbol{m}_\mathbf{S} = \boldsymbol{m}_\mathbf{G}$ (v klas. fyzice experimentální fakt, exp.Eötvös)

Síly tření – působí proti pohybu:

Smykové tření: $T_\mathrm{t} = \mathrm{f}\,.\,F_\mathrm{n}$ f – součinitel smykového tření, F_n – normálová síla

Valivé tření: $T_\mathrm{v} = \mu . F_\mathrm{n}/R$ μ – součinitel valivého tření, *R* – poloměr válce

Odpor prostředí: $\boldsymbol{F}_\mathrm{V} = -k\,\boldsymbol{v}$ (popř. $F_\mathrm{V} = -kv^2$), *v* – rychlost tělesa, $k > 0$

Newtonovy pohybové rovnice
(*nejdůležitější část klasické mechaniky*)

Pohyb v ISS:

Pohybové rovnice:
(Newtonovy)

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$F_i = m\frac{d^2 x_i}{dt^2}, \quad i = 1,2,3$$

3 pohybové rovnice
Diferenciální rovnice 2. řádu
Lineární rce ⇒ princip superpozice

$$F_i = f\left(t, x_1, x_2, x_3, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, \ldots\right)$$

Počáteční podmínky

$$\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{v}(t_0) = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$$

- <u>určení pohybu, jsou-li známy síly (silové pole)</u>
- <u>určení sil, je-li popsán pohyb (trajektorie), tj. ***r*** = ***r***(t)</u>

Determinismus klasické mechaniky – jsou-li zadány počáteční podmínky, je pohyb *h.b.* v daném silovém poli jednoznačně určen.

Newtonovy pohybové rovnice – příklady

$$F_i = m\frac{d^2x_i}{dt^2}, i = 1,2,3$$

1. Pohyb v homogenním gravitačním poli (šikmé vrhy): $\boldsymbol{F} = (0, -mg, 0)$

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -mg, \quad m\frac{d^2x_3}{dt^2} = 0$$

2. Harmonický pohyb: $\boldsymbol{F} = -k\,\boldsymbol{x}$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \qquad \text{Řeš.:} \quad x = A\sin(\omega t + \alpha), \text{ kde } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3. Pohyb při odporu prostředí: $\boldsymbol{F} = -k\,\boldsymbol{v} = -k\,d\boldsymbol{r}/dt$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kv, \qquad \text{Řeš.:} \quad v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}, \qquad x = \frac{mv_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

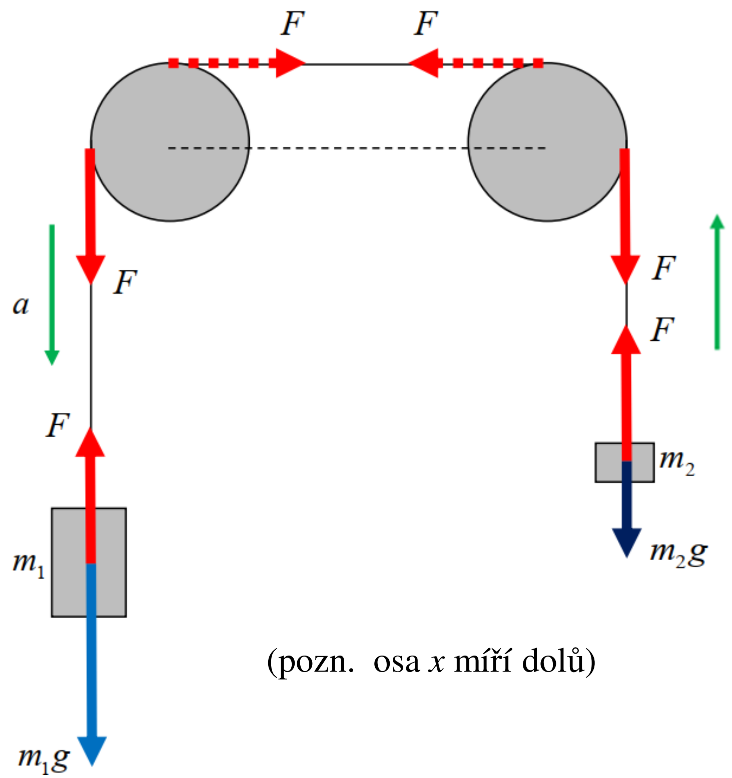
Další příklady: pro odpor prostředí $F_d = -kv^2$
Lorentzova mag. síla $\boldsymbol{F} = q\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$
lehká kladka - viz další strana
kulička ve viskózní kapalině (nízká rychlost-laminární proudění) – spočtěte ustálenou rychlost:

Ř.: $m\ddot{x} = -mg - k\dot{x} \;\Rightarrow\;$ ustálená rychlost (a=0): $v = -\dfrac{mg}{k}$

Newtonovy pohybové rovnice – příklady

Kladka

- nehmotné kladky, nehmotné závěsy, tělesa hmotnosti m_1 a m_2 , platí $m_1 > m_2$
- pohyb v jednom směru → skalární značení
- těžší těleso klesá → kladný směr zrychlení a
- tahová síla vlákna F



(pozn. osa x míří dolů)

$$m_1 g - F = m_1 a$$

$$m_2 g - F = -m_2 a$$

$$a = g\,\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

$$F = 2g\mu_r \quad \text{kde } \mu_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$ ... redukovaná hmotnost

pozn.:
na závěs každé z kladek působí síla F; při pohybu dolů je zdánlivá hmotnost F/g tělesa pohybujícího se zrychleně menší a při pohybu nahoru větší než skutečná motnost tělesa m_i

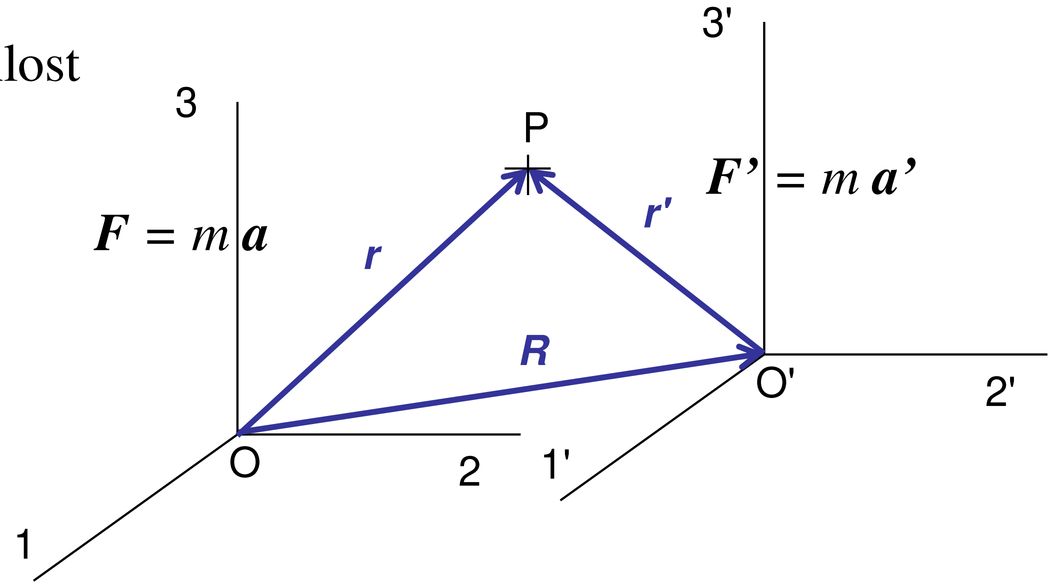
Pohyb v **inerciální** soustavě

$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$ kde $d\vec{R}/dt = \vec{u}$, $\vec{u}$ unášivá rychlost

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$ (adiční teorém rychlostí)

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_u$

$t = t'$



1. $\boldsymbol{u} = konst.$, tj. $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{u}.t$, $\boldsymbol{a}_u = 0$ potom

$\boxed{\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t}$ … Galileova transformace =>

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}'$

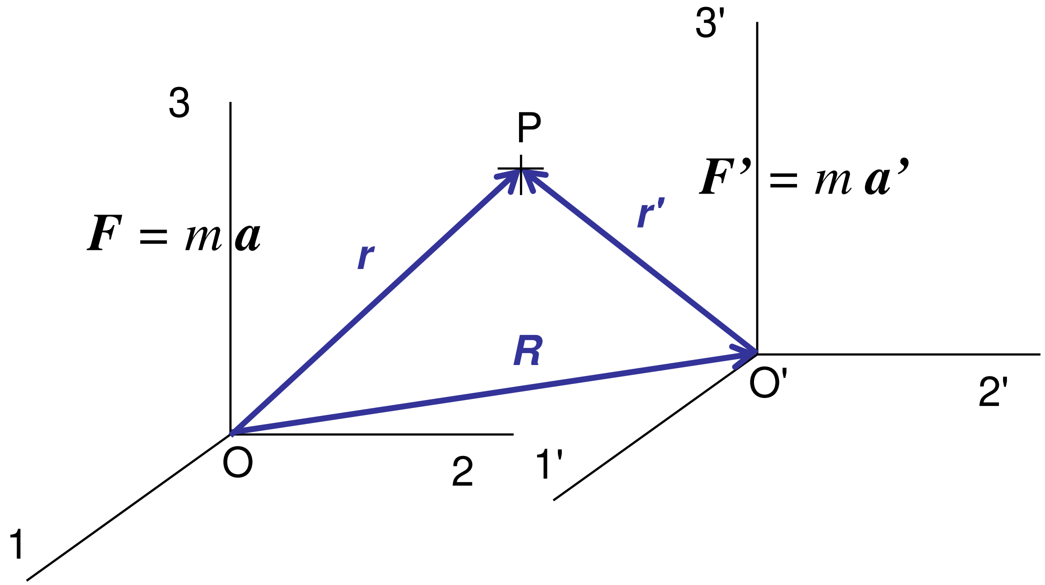
Newtonova pohybová rce má stejný tvar ve všech ISS (je invariantní vůči Galileově transformaci), zrychlení a síly jsou v obou ss stejné – Galileho princip relativity

⇒ Zákony mechaniky jsou stejné ve všech ISS - rovnice mají stejný tvar
(nelze rozhodnout, zda je bod v klidu nebo v prp - pohyb je relativní, ISS nelze rozlišit)

⇒ Všechny i.s.s. jsou rovnocenné: **tj. výsledky měření jsou ve všech ISS shodné, žádná ISS není preferovaná !**
Jinak řečeno: **Zákony klas.mechaniky jsou invariantní vůči Galileiho transformaci a**

Pohyb v **neinerciální** soustavě

2. $\boldsymbol{a}_u = d\boldsymbol{u}/dt \neq 0$ (zrychlená s.s.)
hledáme jak bude vypadat 2.NZ v NISS:



$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_u$

$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{a}' + m\boldsymbol{a}_u = \boldsymbol{F}' + m\,\boldsymbol{a}_u$ tedy

$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F} - m\,\boldsymbol{a}_u$

$$\boxed{\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}^*, \quad \text{kde} \quad \vec{F}^* = -m\vec{a}_u}$$

kde $\boldsymbol{F}^* = -m\,\boldsymbol{a}_u$ je **setrvačná síla** (někdy též „zdánlivá nebo fiktivní síla“)

$\boldsymbol{F}^*$ - není pravá síla, je geom.původu a nemá původ ve vzájemném působení těles, ale v pohybu s.s.

- **neexistuje reakce k této síle**
- **účinkem setrvačných sil se pohybují všechna tělesa se stejným zrychlením,** $\boldsymbol{F}^* \sim m$

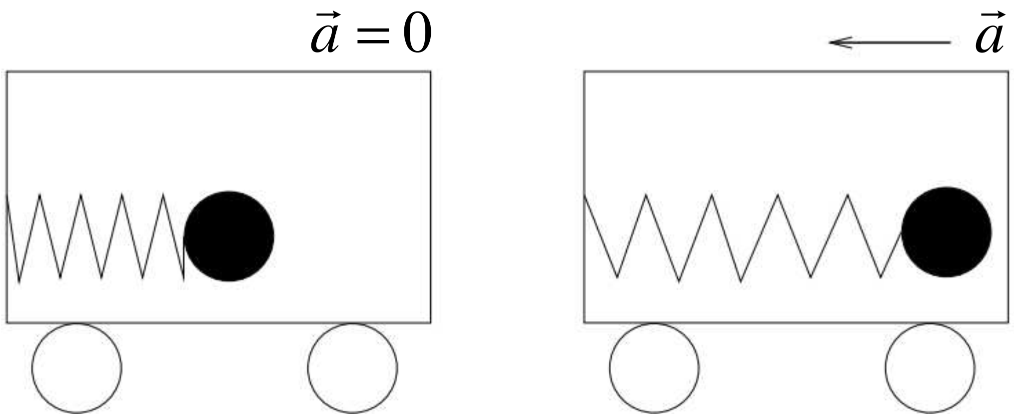
Důsledky:

a) v NSS neplatí 2.N.Z. (a obecně zákony mechaniky) v základním tvaru - **v NSS je třeba kompenzovat zrychlení soustavy doplněním setrvačné síly**

b) Jak řešíme úlohy: buď pracovat důsledně v ISS nebo zavedením setrvačných sil přejít do NSS (což může být často výhodnější)

př. …kulička na pružině ve zrychlené s.s. (vagon, kolotoč), Newton – pokus s vědrem

Ilustrační příklad - zrychlený pohyb vozíku



1. Z hlediska ISS působí pružina (vazba) na kouli takovou silou, aby ji udělila stejné zrychlení jako má vozík. Tato síla je **skutečná** a je **akcí**. Podle 3.NZ působí koule na pružinu stejně velkou, ale opačně orientovanou silou. Tato síla způsobí natažení pružiny, je rovněž **skutečná** a je **reakcí**.

2. Z hlediska NSS pozorovatele spjatého s vozíkem **natažení pružiny způsobí setrvačná síla**, která indikuje, že soustava souřadná spjatá s vozíkem je neinerciální. Tato síla je **kompenzována natažením pružiny, tj. skutečnou silou,** která působí rovněž na **stejné těleso** - kouli. **Nelze tedy hovořit o akci a reakci**.

Kdy mluvíme o setrvačné síle jako o „zdánlivé, fiktivní“ ?
Může se setrvačná síla projevovat stejně reálně jako pravé síly?
Jak “zrušíme” gravitaci? x beztížný stav

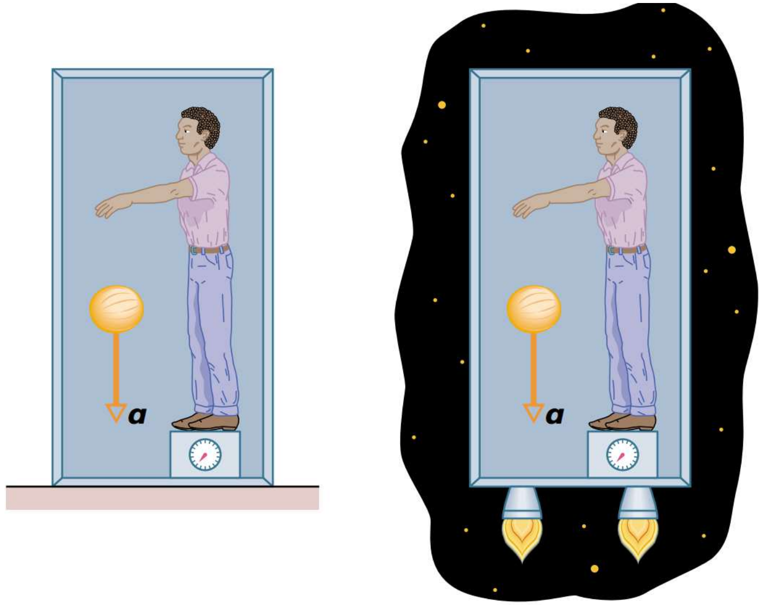
Newtonovy zákony - důsledky

Albert Einstein jednou vyprávěl:
„Byl jsem… na patentovém úřadě v Bernu a najednou mě napadla myšlenka:
»Bude-li osoba padat volným pádem, nebude pociťovat vlastní váhu.« Bylo to překvapení. Tato jednoduchá myšlenka na mě hluboce zapůsobila. A to mě dovedlo až k teorii gravitace.“

Pozn. stav beztíže

(a) Fyzik zavřený ve skříni, která stojí v klidu na Zemi, vidí padat meloun se zrychlením $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

(b) Pokud bude skříň i s ním urychlována se zrychlením g, bude mít meloun vzhledem k němu stejné zrychlení jako v případě (a). Není tedy možné, aby jen na základě takovýchto experimentů prováděných uvnitř skříně mohl fyzik říci, v jaké situaci se nachází. Např. váha, na které stojí, ukazuje v obou případech stejný údaj.



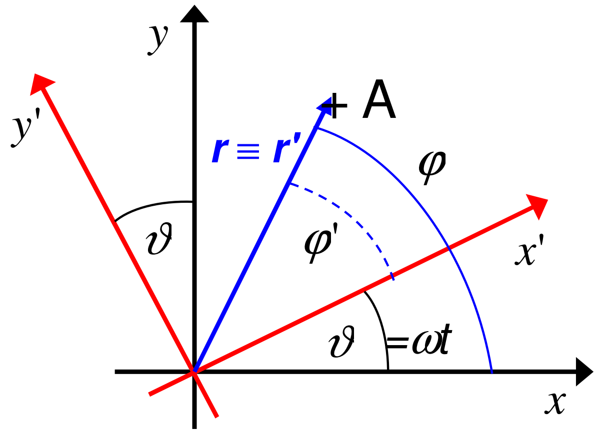
(a) (b)

zdroj Halliday

Rotující s.s. - transormace

čárkovaná s.s. rotuje konstantní úhlovou rychlostí ω

(v čase $t = 0$ oba s.s. splývají)



poloha:

polární souřadnice: kartézské souřadnice:

$$r' = r \qquad x = r\cos\varphi$$

$$\varphi' = \varphi - \vartheta \qquad y = r\sin\varphi$$

$$x' = r'\cos\varphi' = r\cos(\varphi - \vartheta)$$

$$y' = r'\sin\varphi' = r\sin(\varphi - \vartheta)$$

$$\downarrow$$

$$x' = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta$$

$$y' = -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta \xrightarrow{\vartheta(t) = \omega t}$$

Transformační vztahy:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\omega t + y\sin\omega t \\ y' &= -x\sin\omega t + y\cos\omega t \\ z' &= z \end{aligned}}$$

Obecná transformace:

$$\boxed{x_i' = a_{ij}x_j \quad (i = 1,2,3)}$$

Směrové kosiny: $a_{ij} = \cos\alpha_{ij}$ Podm. ortogonality: $a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}$

Kroneckerův symbol: $i = j \rightarrow \delta_{ij} = 1$

$i \neq j \rightarrow \delta_{ij} = 0$

počet rovnic, počet členů?

Pro jednotkové vektory: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

3. Pohyb v otáčivé s.s. (viz např Havránek)

Derivací rovnic 1(3.5) podle času dostaneme složky rychlosti a zrychlení hmotného bodu v obou soustavách

$$v'_1 = v_1 \cos \omega t + v_2 \sin \omega t + \omega(-x_1 \sin \omega t + x_2 \cos \omega t),$$
$$v'_2 = -v_1 \sin \omega t + v_2 \cos \omega t - \omega(x_1 \cos \omega t + x_2 \sin \omega t),$$
$$v'_3 = v_3;$$

$$a'_1 = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t + 2\omega(-v_1 \sin \omega t + v_2 \cos \omega t) - \omega^2(x_1 \cos \omega t + x_2 \sin \omega t),$$
$$a'_2 = -a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t - 2\omega(v_1 \cos \omega t + v_2 \sin \omega t) - \omega^2(-x_1 \sin \omega t + x_2 \cos \omega t),$$
$$a'_3 = a_3.$$

úpravou:

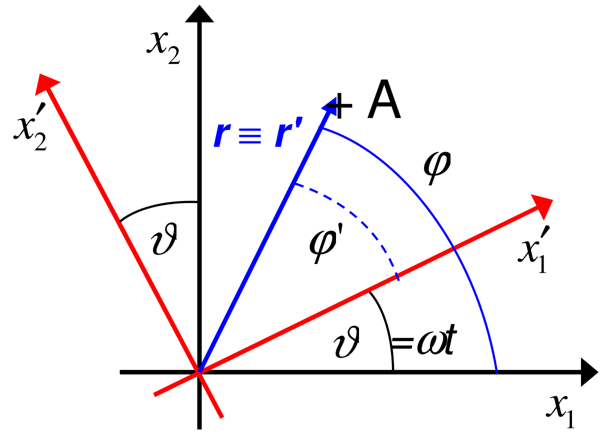
$$v'_1 = -\omega' x'_2 + (v_1 \cos \omega t + v_2 \sin \omega t),$$
$$v'_2 = +\omega' x'_1 + (-v_1 \sin \omega t + v_2 \cos \omega t),$$
$$v'_3 = v_3;$$

$$a'_1 = \omega'^2 x'_1 - 2\omega' v'_2 + (a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t),$$
$$a'_2 = \omega'^2 x'_2 + 2\omega' v'_1 + (-a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t),$$
$$a'_3 = a_3.$$

Členy $\omega'^2 x'_1$, $\omega'^2 x'_2$ jsou složkami *odstředivého zrychlení*, členy $-2\omega' v'_2$, $2\omega' v'_1$ jsou složkami *Coriolisova zrychlení* (Gaspard CORIOLIS, 1792–1843).

$$\mathbf{a}_C = 2[\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{v}'] = -2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'].$$

Coriolisovo zrychlení je *kolmé* jak na vektor úhlové rychlosti ω' (směr rotační osy), tak na rychlost $\mathbf{v}'$ hmotného bodu v *rotující* soustavě.

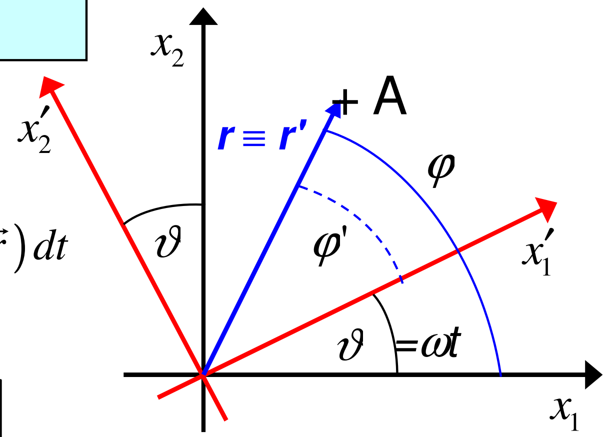


Transformační vztahy:

$$\boxed{\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \omega t + x_2 \sin \omega t \\ x'_2 &= -x_1 \sin \omega t + x_2 \cos \omega t \\ x'_3 &= x_3 \end{aligned}}$$

pozn.: vektor ***r*** i souřadnice bodu A se transformují podle stejných vztahů

Pohyb v **otáčivé neinerciální** soustavě



Změna polohového vektoru bodu A, pro pozorovatele v i.s.s:

$\boxed{\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} = \vec{v} - \omega \times \vec{r}}$ kde $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, tedy $\boxed{\dfrac{d'\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{r}}$ tj. $d'\vec{r} = d\vec{r} - (\vec{\omega} \times \vec{r})\, dt$

tj. **časové derivace téhož vektoru v různých s.s.** se liší !!

Vztahy platí pro časové změny **libovolného** vektoru ***A*** !

neb se liší časový průběh jejich souřadnic, tedy: $\boxed{\dfrac{d'\vec{A}}{dt} = \dfrac{d\vec{A}}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{A}}$

potom pro rychlost v NSS: $\dfrac{d'\vec{v}'}{dt} = \dfrac{d\vec{v}'}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{v}'$

pozn. časové derivace v otáčivé ss ozn. d'

Tedy zrychlení v n.s.s.:

$$\vec{a}' = \frac{d'\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{v}' = \frac{d}{dt}\left(\vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r}\right) - \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$= \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}} - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} - \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$= \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times \left(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}\right) - \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$= \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \qquad = \vec{a} + \vec{a}_{\varepsilon} + \vec{a}_{o} + \vec{a}_{c}$$

$\boxed{\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\varepsilon}^{*} + \mathbf{F}_{o}^{*} + \mathbf{F}_{c}^{*}}$ Otačivá s.s. $\rightarrow$ skutečná síla + **3 setrvačné síly**

3. Pohyb v otáčivé s.s. - pokr.

$\mathbf{F}' = m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_\varepsilon^* + \mathbf{F}_o^* + \mathbf{F}_c^*$ síla působící v otáčivé s.s.

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ skutečná síla v i.s.s.

$\mathbf{F}_\varepsilon^* = -m\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}$ síla v důsl. zrychleného rotačního pohybu ($=|F_t|$), Eulerova síla

$\mathbf{F}_o^* = -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = -m\omega^2 r\cdot\mathbf{n}$ odstředivá síla ($=|F_d|$)

$\mathbf{F}_c^* = -2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'$ Coriolisova síla

F^* = setrvačné síly (jsou geometrického původu, nemají původ ve vzájemném působení těles)

- **neexistují reakce k těmto silám**
- **účinkem setrvačných sil se pohybují všechna tělesa se stejným zrychlením**

Např. – **odstředivá síla působí v NSS zatímco dostředivá síla v ISS** (nesměšovat!! formálně jsou obě stejně veliké, opačně orientované)

Řešení úloh: pracujeme buď ISS nebo naopak v NSS, pak musíme zahrnout setrvačné síly (vnější × vnitřní pozorovatel)

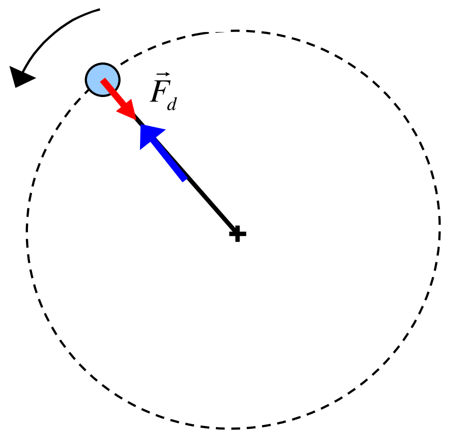
Př.: rotace h.b. na kolotoči, pohyb po Z (tíhové zrychlení, ω=7,3 . 10^{-5} s^{-1}), Coriolisovy síly, Foucaultovo kyvadlo

Př.: cykloida, kladka, kónické kyvadlo (regulátor otáček)

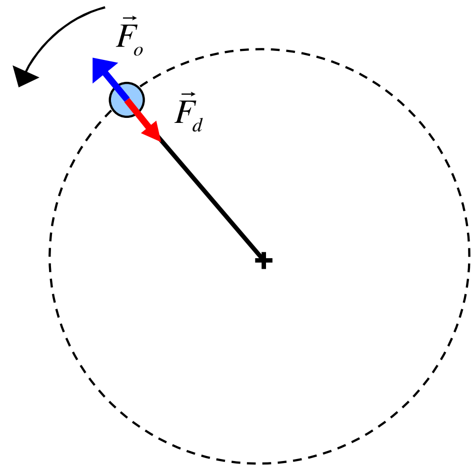
Newtonovy pohybové rce v základním tvaru platí jen v ISS; v NSS je třeba do vztahů doplnit setrvačné síly!

Ilustrační příklad - kulička na provázku (jízda na kolotoči), pohyb v grav.poli

pohled z ISS



pohled z NSS

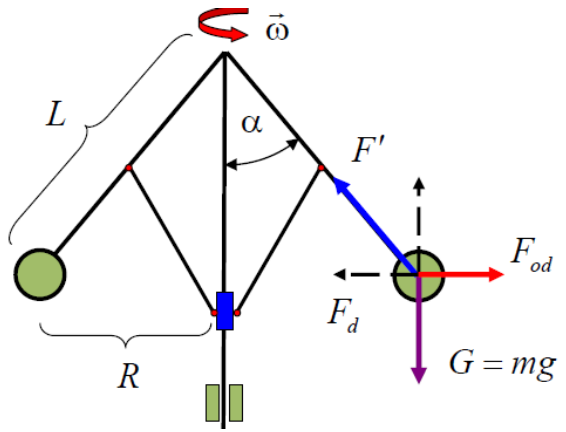


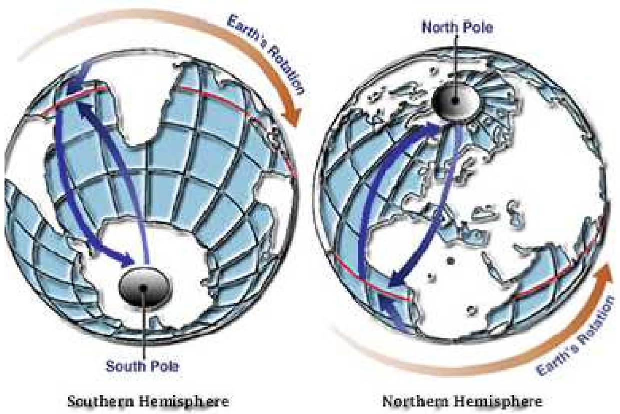
$$\vec{F}_o = -m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) \rightarrow \quad m\omega^2 r = m\frac{v^2}{r}$$

dostředivá síla (způsobuje pohyb tělesa po zakřivené dráze v ISS):
tah provázku na kuličku, kompenzována tahem kuličky na provázek ⇒ akce a reakce

odstředivá síla: napíná provázek z hlediska pozorovatele v NSS, kompenzována tahem provázku upevněného v ose rotace, obě působí na kuličku ⇒ nejde o akci a reakci,
viz též stav beztíže

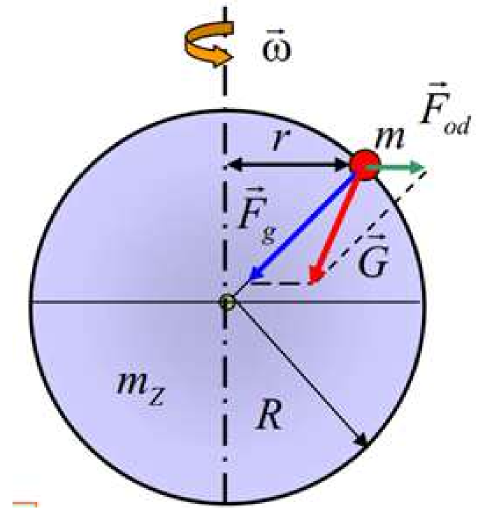
Př.: kónické kyvadlo, odstředivý regulátor, Coriolisovy síly v atmosféře





Ot.: kdy je setrvačná odstředivá nebo Coriolisova síla „zdánlivá, fiktivní“?

Změna tíhového zrychlení rotací Země (odstředivé zrychlení v Praze: $a = 2{,}59.10^{-2}$ ms^{-2} = 0,0026 g)



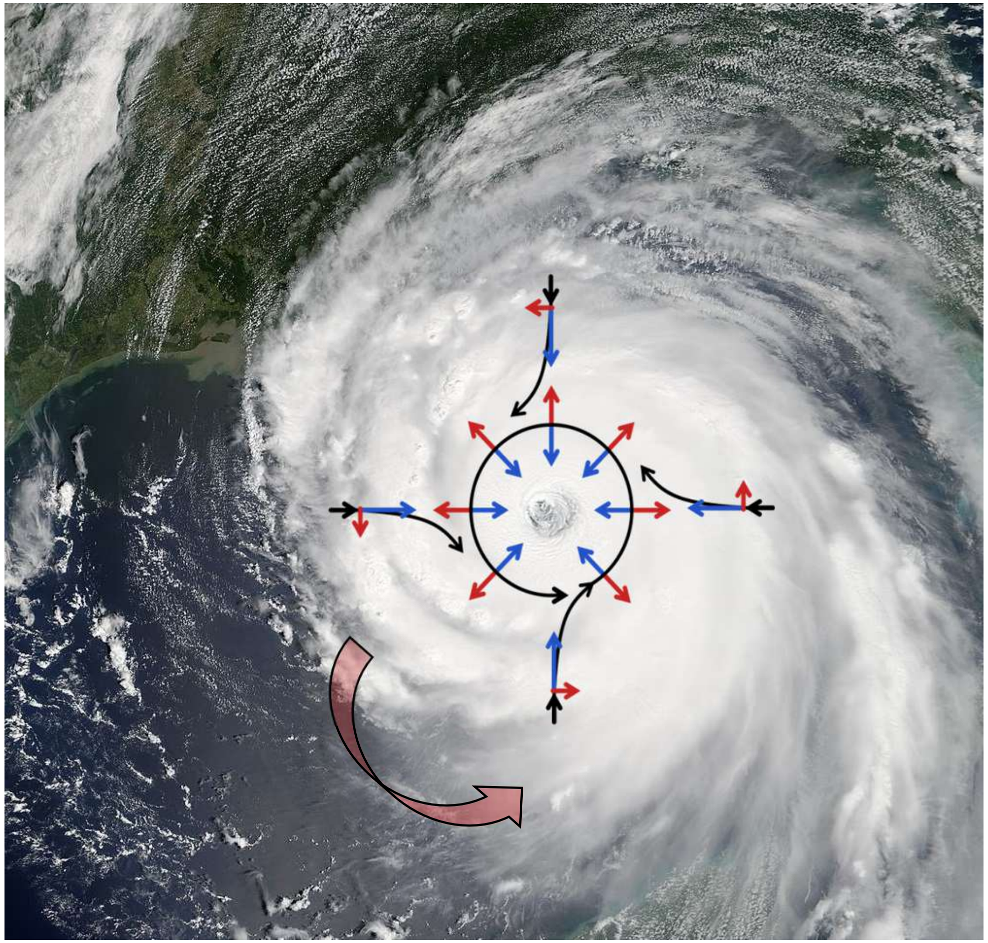
Coriolisova síla je podstatná při pohybu v rychle rotujících soustavách a při pohybu rychle se pohybujících hmotných těles (střely, rakety)

- Na rotující ploše (výstřel, basket…)
- Na zemském povrchu, ω=7,3 . 10^{-5} s^{-1}
- <u>Foucaultovo kyvadlo</u>: rov.kyvu se stočí o 2π sinφ za den (φ = s.š., j.š.)
- Balistika, námořní děla
- Turbíny, kompresory
- Vodní toky

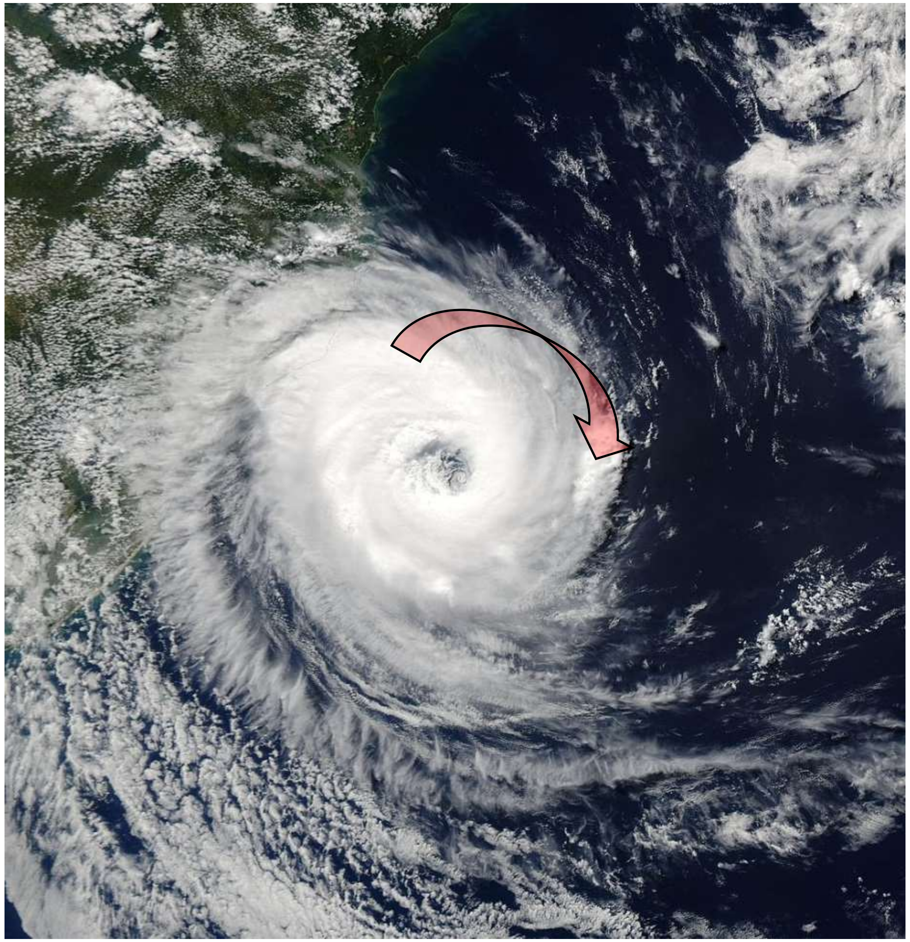
A výlevka umyvadla?

Coriolisova síla

hurikán severním Altantiku



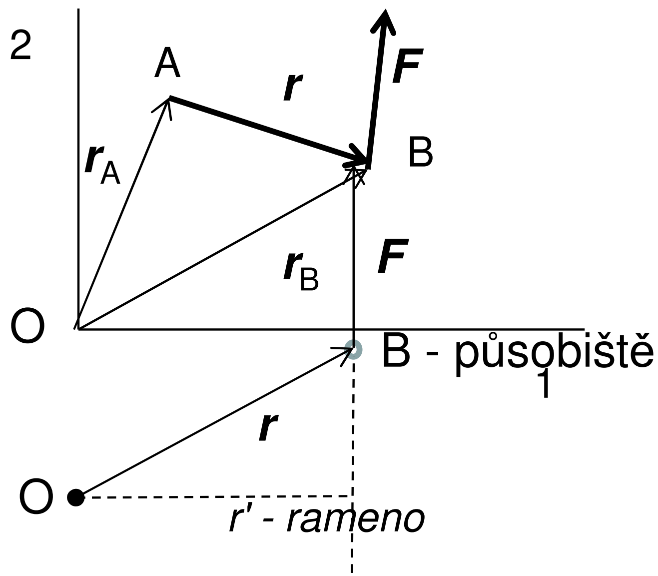
v jižním Altantiku



Schematicky proudění vzduchu okolo tlakové níže na sev. polokouli, rozdíl tlaků - modré šipky, Coriolisova síla (vždy kolmá na rychlost) – červené šipky, proudění – černé šipky
zdroj wikipedia

Další veličiny

Hybnost: $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$ (charakterizuje translační pohyb tělesa)



Momenty: síly

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right) \times \vec{F}$$

hybnosti

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = \left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right) \times m\vec{v}$$

(charakteristika rotačních pohybů)

Impuls síly:
(<u>časový účinek síly</u>)

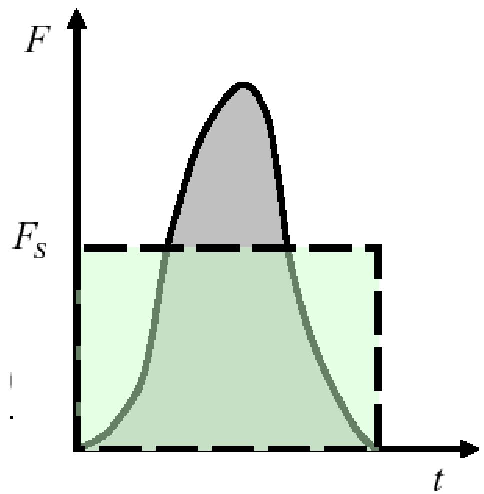
$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t \to \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \Delta t_i \to \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p} \qquad \boxed{\vec{I} = \Delta\vec{p}}$$

změna hybnosti h.b.= impulsu síly vykonaného na h.b.:

Průměrná síla:
(např. střední nárazová síla,
střední zrychlení)

$$\left\langle \vec{F} \right\rangle = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\left\langle \vec{F} \right\rangle = m\left\langle \vec{a} \right\rangle$$



Pozn.: def. **střední hodnoty** fyzikální veličiny $\langle \mathbf{v} \rangle$: $\boxed{\left\langle \mathbf{v} \right\rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} dt}$

Impuls momentu sil: $\vec{I}_M = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\left(\vec{r} \times \vec{p}\right)}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{L}}{dt} dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$ $\qquad \boxed{\vec{I}_M = \Delta\vec{L}}$

Další veličiny

Zachování hybnosti soustavy dvou h.b., na které nepůsobí žádné vnější síly:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}, \quad \frac{d\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const}$$

Pohybová rovnice pro rotační pohyby – na h.b. působí moment síly :

Odvození: $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 + \vec{r} \times \vec{F} = \overrightarrow{M} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

$\Rightarrow$ Zachování momentu hybnosti: nepůsobí-li na h.b. (těleso) **vnější moment sil**, **moment hybnosti se zachovává** (to platí i pro 2 izolované h.b.), tedy

$$\text{pokud } \overrightarrow{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \overrightarrow{const}$$

Poznámka:

Experiment $\Rightarrow$ uvedené ZZ hybnosti a momentu hybnosti nepovažujeme jako důsledek 3. NZ, ba právě naopak:

- ZZ hybnosti a momentu hybnosti platí i mimo rámec klasické mechaniky (QM, STR)
- 3.NZ tak můžeme považovat za důsledek platnosti těchto dvou zákonů

Translační × Rotační pohyb - analogie

translace		rotace	
dráha	$x, \quad s$	úhel	$\varphi, \quad \vec{\varphi}$
rychlost	$v = \dfrac{ds}{dt}, \quad \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$	úhlová rychlost	$\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
zrychlení	$a_t = \dfrac{dv}{dt}, \quad \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	úhlové zrychlení	$\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$
hybnost	$\vec{p} = m\vec{v}$	moment hybnosti	$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p}$
síla	$\vec{F}$	moment síly	$\vec{M} := \vec{r} \times \vec{F}$
pohyb.rce	$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	pohyb.rce	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
hmotnost	m	moment setrvačnosti	J
kin. energie	$E_k = \dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{1}{2}mv^2$	kin. energie	$E_k = \dfrac{1}{2}J\omega^2$
1. imp.věta	$\vec{F}^E = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$	2. imp.věta	$\vec{M}^E = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

Příklad = z.z.hybnosti, impuls síly

Příklad:

Spočítat průměrnou sílu F, s jakou puška kopne do ramene a jakou rychlost bude mít pažba vůči ramenu střelce, energii střely a pušky po výstřelu.

Jedná se o pušku A-Square model Hannibal, do které se nabíjí náboj 577 Tyranosaur:
Hmotnost pušky $m2$: 6kg
Délka hlavně: 100cm
Hmotnost projektilu: 49g
Úsťová rychlost: 750 m/s
Při výpočtu pro jednoduchost počítejte pouze se soustavou puška – náboj, účinky spalin výstřelu zanedbejte.

Ř:
F=13781N
$V2$=6,125m/s
Δt=2.67ms
E_k_strely=13781J
E_k_pusky=112.5J