1. Kinematika

Anotace: Kinematika bodu. Parametrický popis pohybu, rychlost, zrychlení, rozklad zrychlení na tečnou a normálovou složku. Základní druhy pohybů.

- Zkoumá pohyb těles v prostoru bez toho, že by se zabývala příčinami pohybu

- **Prostor – trojrozměrné (3D) kontinuum** (spojitá změna vzdáleností, Eukleidovský prostor)
  počet stupňů volnosti N=3 (počet údajů, kterými je hmotný bod popsán v prostoru). Stupně volnosti můžeme odebrat pomocí **vazeb,** (pohyb v rovině N=2, pohyb po přímce N = 1)

- **Čas – spojitý parametr, společný všem objektům nezávisle na pohybu, 1D kontinuum**

- **Hmotný bode** (h.b.) – bezrozměrný, tj. rozumíme jím takové těleso, jehož **velikost, tvar a prostorové rozložení hmotnosti můžeme z hlediska řešené úlohy zanedbat**, a který můžeme v prostoru zobrazit jediným bodem (nemá rozměr, tedy např. nerotuje, nedeformuje se)
  Pozn. reálná tělesa lze popsat jako soustavy h.b.

- Vztažná **soustava souřadnic** (s.s.) - vůči ní stanovujeme polohu h.b.
  kartézská (pravotočivá), polární, sférická …, určena počátkem a orientací os

Pohyb hmotného bodu (hb)

- Poloha tělesa (hmotného bodu) – určena v prostoru pouze **relativně** vzhledem ke vztažné soustavě souřadné
- **Vztažná soustava souřadná** může být zvolena libovolně, vždy však vázána na hmotné objekty (tělesa)
- Poloha je určena **polohovým vektorem** **(radius vektor)** $\boldsymbol{r}$, který se mění s časem (je funkcí času), parametrický popis:

$$\boldsymbol{r} = f(\mathrm{t}) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\mathrm{t}) \quad \text{tj. } x_1 = x_1(\mathrm{t}),\ x_2 = x_2(\mathrm{t}),\ x_3 = x_3(\mathrm{t})$$

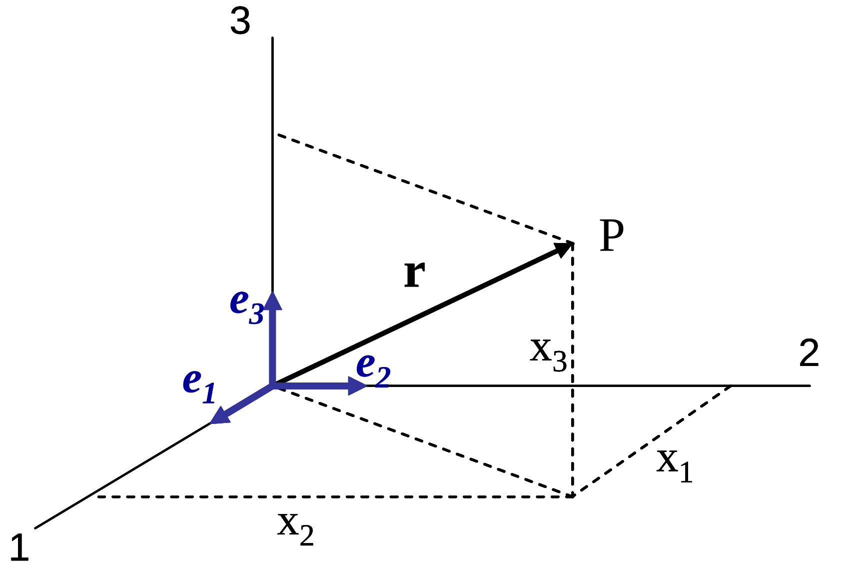
$$\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3) = x_1(\mathrm{t})\boldsymbol{e}_1 + x_2(\mathrm{t})\boldsymbol{e}_2 + x_3(\mathrm{t})\boldsymbol{e}_3$$

- Úplný popis pohybu hmotného bodu získáme, udáme-li časovou závislost polohového vektoru, tj. pro všechny složky $x_i = x_i(\mathrm{t})$, $i = 1, 2, 3$ … **parametrický popis** pohybu
- **Trajektorie** – geometrická křivka v prostoru, po které se *hb* pohybuje (opisuje koncový bod polohového vektoru), dle tvaru – přímočarý a křivočarý pohyb
- **Dráha**, s – délka trajektorie, kterou h.b. proběhne za časový úsek $\Delta t = t_2 - t_1$, $s = s(t)$
- Tvar dráhy (trajektorie) → vyloučením parametru t,
  př.: najděte tvar trajektorie zadané parametricky $x_1 = 2t$, $x_2 = t^2$

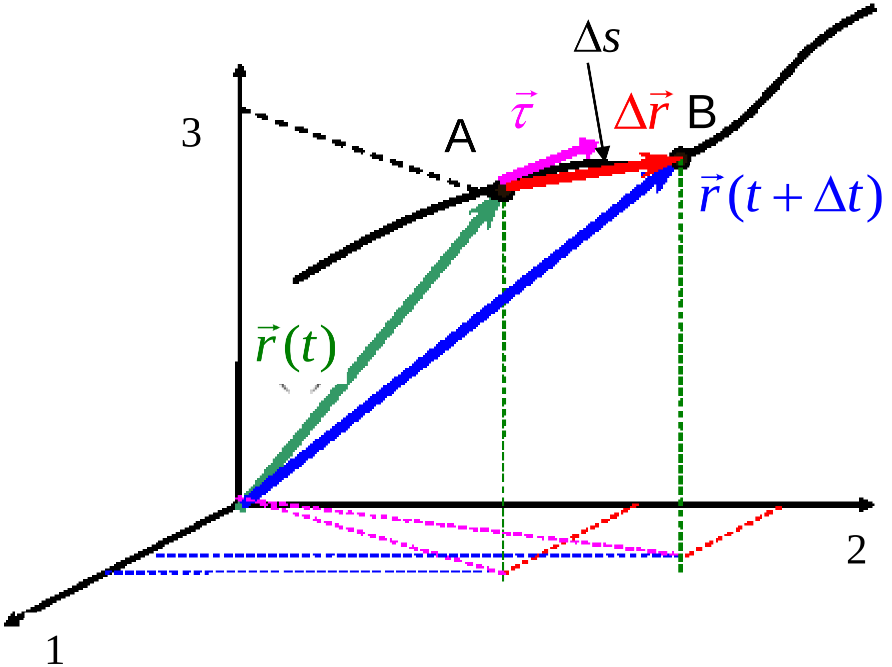
Poznámky

- Souřadnice bodu P v kartézské ss prostoru x_1, x_2, x_3
- <u>Polohový vektor</u> $\boldsymbol{r} = (x_1,x_2,x_3)$ … pevně umístěný v počátku
  - při posunutí ss → změna polohových vektorů všech hb
  - ale vektory se při translaci nemění
  - polohový vektor je tzv. umístěný (vázaný) vektor
  - jako volný vektor se chová rozdíl polohových vektorů

$$\boldsymbol{r} = (x_1,x_2,x_3) = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$$



Pohyb hmotného bodu



$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$ … změna poloh.v.

$|\Delta\boldsymbol{r}| \neq \Delta s$

$|\Delta\boldsymbol{r}| \leq \Delta s$

Pro $\Delta\boldsymbol{r} \to 0$ nahradíme $\Delta\boldsymbol{r} \to d\boldsymbol{r}$, $\Delta s \to ds$

Platí: $d\boldsymbol{r}$ není $\parallel \boldsymbol{r}$

$d\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{\tau}$ (tečný vektor)

$d\boldsymbol{r} = ds\,.\boldsymbol{\tau}$ tedy $|d\boldsymbol{r}| = ds$

- **Dráha**: $s = \sum_A^B \Delta s_k \to \lim_{\Delta s_k \to 0} \sum_A^B \Delta s_k = \int ds$ $\qquad ds = \sqrt{\sum dx_i^2}$

- **Rychlost** (velikost rychlosti - např. údaj tachometru) - časová změna polohy

Průměrná: $\bar{v} \equiv \langle v \rangle$ $\qquad \bar{v} = \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

Okamžitá: $v = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ $\qquad \boxed{v = \dfrac{ds}{dt} \equiv \dot{s}}$ (skalár)

Pohyb hmotného bodu

- **Vektor okamžité rychlosti, *v*** – časová změna polohy

- Vektor rychlosti ***v***: $\vec{v} = v\vec{\tau} = \dfrac{ds}{dt}\vec{\tau}$ $\quad \boxed{\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}(t)}$

  tj. $d\vec{r} = \vec{v}\,dt, \quad d\vec{r} \parallel \vec{v}$

  $\vec{v}$ je tečna k trajektorii

- Složky rychlosti:
  (průměty okamžité rychlosti do směru os) $\boxed{v_i = \dfrac{dx_i}{dt} \equiv \dot{x}_i(t), \quad i = 1,2,3}$

Okamžitá rychlost je vektor, který má směr tečny ke křivočaré dráze v místě, v němž okamžitou rychlost určujeme, a míří ve směru pohybu.

- **Pravidlo o skládání rychlostí a pohybu (<u>postulát</u>):**
  Rychlost bodu je možno rozkládat na složky, ale také skládat různé rychlosti příslušné témuž hmotnému bodu.

$$\boxed{\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{e}_i \equiv v_i \vec{e}_i}$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\sum v_i^2} = \sqrt{\sum \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2} \qquad \text{směrové kosiny:} \quad \cos\alpha_i = \frac{v_i}{v}$$

- **Rovnoměrný pohyb** v = konst, nerovnoměrný pohyb $v \neq$ konst
- Opačná úloha – zjištění dráhy (integrál pohybu): $s = \int v(t)\,dt$

Pohyb hmotného bodu

Ekviv.popis:

Uvažujeme $\vec{r} = \vec{r}(s)$ a $s = s(t)$, tedy jako složenou funkci $\vec{r} = \vec{r}(s(t))$

Vektorovou rychlost vyjádříme jako derivaci složené funkce

$$\vec{v}(s(t)) = \frac{d}{dt}\vec{r}\left(s(t)\right) = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds(t)}{dt}$$, kde

- $\dfrac{ds(t)}{dt} = v(t)$ ... velikost rychlosti (skalární rychlost)
- $\dfrac{d\vec{r}}{ds} = \dfrac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = \vec{\tau}$ ... <u>tečný vektor</u> trajektorie
    - jednotkový vektor $|\vec{\tau}| = 1$
    - $d\vec{r} = \vec{v}\cdot dt \Rightarrow d\vec{r} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{\tau} \parallel \vec{v}$

Závěr: $\vec{v}(t) = \vec{\tau}\cdot v(t)$

Pohyb hmotného bodu

- **Zrychlení *a*** – časová změna rychlosti

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}$$

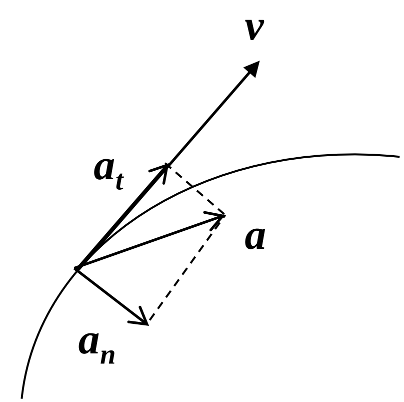
- Složky zrychlení:
  (průměty okamžité rychlosti do směru os)

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{d^2x_i}{dt^2} \equiv \ddot{x}_i$$

- $\vec{a} \parallel d\vec{v}$ směr rovnoběžný s přírůstkem rychlosti, nikoli s tečnou k trajektorii

  $\vec{a}$ obecně není $\parallel \vec{\tau}, \vec{v}, \vec{r}$

- Skládání složek zrychlení: $$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i \equiv a_i \vec{e}_i$$



Pohyb hmotného bodu

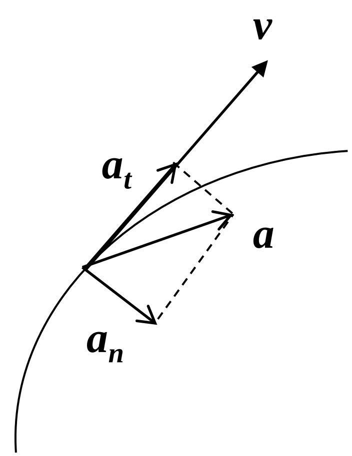
➢ Tečné a normálové zrychlení a_t, a_n

$\vec{a} \parallel d\vec{v}$ směr rovnoběžný s přírůstkem rychlosti, nikoli s tečnou k trajektorii

$\vec{a}$ není $\parallel \vec{\tau}, \vec{v}, \vec{r}$

$$a_t = \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{a} \cdot \vec{\tau}$$

$$\vec{a}_t = \left(\vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right) \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\sum \frac{\frac{dv_i}{dt} \cdot v_i}{v} \right) \vec{\tau} \quad = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{\vec{v}}{v}$$



Velikost a_t:

dk: ….

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt} \equiv \dot{v} \equiv \frac{d^2 s}{dt^2} \equiv \ddot{s}}$$

➢**Normálové zrychlení:** $\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t$

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}$$

R je poloměr křivosti dráhy (<u>oskulační kružnice</u>) a v velikost rychlosti v místě, kde a_n určujeme.

Pohyb hmotného bodu

Tečná a normálová složka zrychlení:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v \cdot \vec{\tau}) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{\tau} + v\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{\tau} + v^2\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}s} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

tečná složka **normálová složka**

$$\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}(\vec{\tau} \cdot \vec{\tau}) = 2\vec{\tau} \cdot \mathrm{d}\vec{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \vec{\tau} \perp \mathrm{d}\vec{\tau} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{|\mathrm{d}\vec{\tau}|}$$

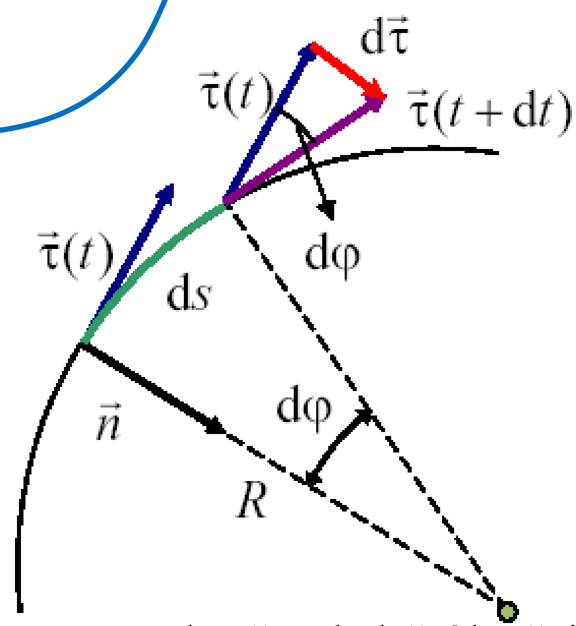
tj. $\vec{n} \parallel d\vec{\tau}, \quad \vec{n} \perp \vec{\tau}$

podobné Δ: $\dfrac{|d\vec{\tau}|}{ds} = \dfrac{|\vec{\tau}|}{R}$, protože $|\vec{\tau}| = 1 \rightarrow \dfrac{|d\vec{\tau}|}{ds} = \dfrac{1}{R}$,

vynásobením obou stran $\vec{n}$: $\dfrac{\vec{n}|d\vec{\tau}|}{ds} = \dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \dfrac{\vec{n}}{R}$

- **tečná složka:** $\boxed{\vec{a}_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{\tau}}$

- **normálová složka:** $\boxed{\vec{a}_n = \dfrac{v^2}{R}\vec{n}}$



(odvození – viz též kruhový pohyb)

R = poloměr oskulační kružnice

Klasifikace pohybů – integrály pohybu

- Přímočarý, **v**/|v| = **const**
- Křivočarý
- Rovnoměrný **v = const**
- Nerovnoměrný **v ≠ const**

- Přímočarý rovnoměrný: $x = k_1 t + k_0$
- Přímočarý rovnoměrně zrychlený: $x = k_2 t^2 + k_1 t + k_0$

- rychlost a zrychlení: $v = 2k_2 t + k_1$ $a = 2k_2$
  k_2 = a/2, k_0, k_1 poloha a rychlost v čase $t=0$

- **Integrály pohybu:**

zrychlení: $\vec{a} = konst.$

rychlost: $\vec{v} = \int \vec{a}\,\mathrm{d}t = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t$

dráha: $\vec{r} = \int \vec{v}\,\mathrm{d}t = \int (\vec{v}_0 + \vec{a}\,t)\,\mathrm{d}t = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$

Počáteční podmínky

$\vec{r}_0(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$

$\vec{v}_0(t_0) = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

Klasifikace pohybů – harmonický pohyb

- **Harmonický pohyb v přímce**: $x = A \sin(\omega t + \alpha) + x_0$, $(\omega t + \alpha)$ …fáze

kde amplituda *A*, *úhlová* frekvence $\omega > 0$ jsou konstanty
rychlost, zrychlení: $a = -\omega^2 (x - x_0)$
Zrychlení harmonického pohybu je tedy úměrné výchylce a míří proti ní

Perioda kmitů: $T = 2\pi/\omega$
Frekvence kmitů: $f = 1/T = \omega/2\pi$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \alpha)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 (x - x_0)$$

Klasifikace pohybů – kruhový pohyb

Křivočaré pohyby - v rovině (2 parametrické rce), v prostoru (3 parametrické rce)

- **Rovnoměrný kruhový pohyb**

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= R\cos(\omega t + \alpha) + x_{10} \\ x_2 &= R\sin(\omega t + \alpha) + x_{20} \end{aligned}}$$

kde $R > 0$ poloměr kružnice, ω = konst., kruhová frekvence

- Rovnice dráhy: $(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - y_{20})^2 = R^2$
- Perioda frekvence: $T = 1/f$, $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$
- Rychlost: $v_1 = \ldots$ $v_2 = \ldots$ $\boxed{v = \omega R}$
- Zrychlení: $a_1 = \ldots = -\omega.v_2$ $a_2 = \ldots = \omega.v_1$ $\boxed{|\vec{a}| = \omega \cdot v = \omega^2 R = v^2 / R}$

vektorově: $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}_0$

kde vektor $\vec{r}_0 = (x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20})$ míří ze středu kružnice k *h.b.* **dostředivé zrychlení**

- Pozn.: harmonický pohyb vznikne průmětem rovnoměrného kruhového pohybu na některou souřadnou osu

- **Nerovnoměrný pohyb po kružnici**: $x_1 = R\cos\varphi(t) = R\cos(\omega(t).t + \alpha)$

$x_2 = R\sin\varphi(t) = R\sin(\omega(t).t + \alpha)$

Klasifikace pohybů – kruhový pohyb, vektorové znázornění

Vektorové znázornění kruhového pohybu

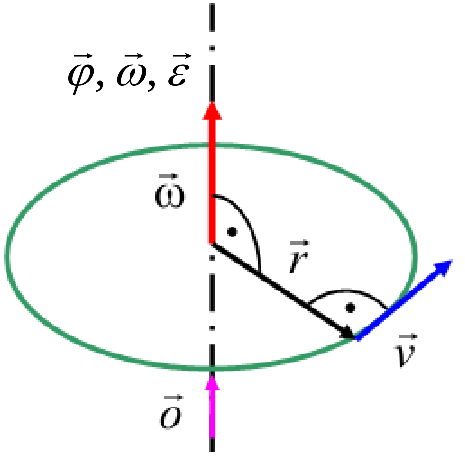
- **úhlové pootočení** φ - úhel, který svírají dva průvodiče pohybujícího se bodu $\boxed{\vec{\varphi} = \varphi \cdot \vec{o}}$

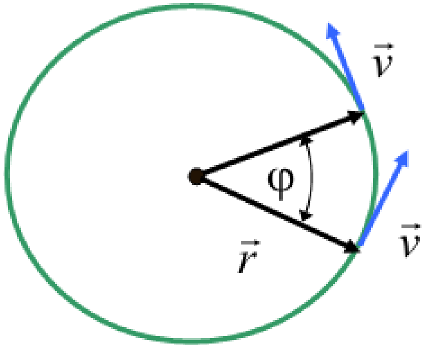
- **úhlová rychlost** ω - časová změna úhlu φ

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{o} \quad [\text{rad/s}]}$$

- časovou změnu úhlové rychlosti poté vyjadřuje **úhlové zrychlení**

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} \quad [\text{rad/s}^2]}$$





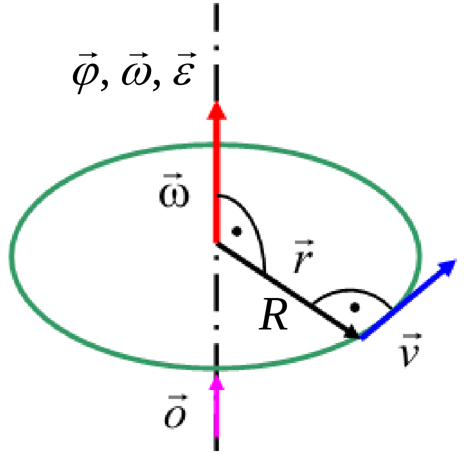
Klasifikace pohybů – vektory úhlové rychlosti a zrychlení

$$s = R\varphi$$

$$ds = Rd\varphi \qquad d\vec{r} = d\vec{\varphi}\times\vec{r}$$

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}\times\vec{r}$$

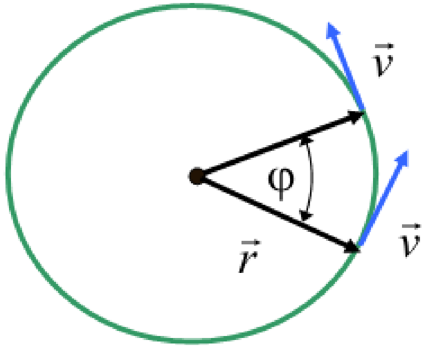
$$v = R\omega \qquad \vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$



vektorově: $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}}$

$$\boxed{\vec{a}_n = \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)}$$ normálová složka

$$\boxed{\vec{a}_t = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r}}$$ tečná složka



Kontrola derivací:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\vec{\varepsilon}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\vec{\varepsilon}\times\vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega}\times\vec{v}}_{\vec{a}_n} = \underbrace{\vec{\varepsilon}\times\vec{r}}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)}_{\vec{a}_n}$$