

FYZIKA I: NOFY 021

Mechanika, molekulová fyzika a termodynamika

Přednášející:

Miroslav Kučera - Ke Karlovu 5, II. patro, dv. č. 3

e-mail: miroslav.kucera@mff.cuni.cz

Anotace

Kinematika a dynamika hmotného bodu. Soustava hmotných bodů a mechanika tuhého tělesa. Kmity a vlnění. Základy mechaniky spojitých prostředí. Základy termodynamiky. Molekulárně kinetická teorie látek. Přednáška určena pro posluchače 1. ročníku Obecné fyziky.

FYZIKA I: NOFY 021 - mechanika, molekulová fyzika a termodynamika

Anotace - Kinematika a dynamika hmotného bodu. Soustava hmotných bodů a mechanika tuhého tělesa. Kmity a vlnění. Základy mechaniky spojitých prostředí. Základy termodynamiky. Molekulárně kinetická teorie látek. Přednáška určena pro posluchače 1. ročníku Obecné fyziky.

I. MECHANIKA

1. Kinematika bodu.

Parametrický popis pohybu, rychlost, zrychlení, rozklad zrychlení na tečnou a normálovou složku. Základní druhy pohybů.

2. Dynamika hmotného bodu.

Newtonovy zákony. Síly působící při známém druhu pohybu. Pohybová rovnice hmotného bodu, vrhy, harmonický pohyb. Inerciální a neinerciální soustavy souřadné, zdánlivé síly, síla Coriolisova a odstředivá.

3. Energie a pohyb v silovém poli.

Práce, výkon, kinetická energie. Konzervativní pole, intenzita a potenciál, centrální síla, lineární harmonický oscilátor, potenciální energie. Nekonzervativní síly, tření. Gravitační zákon. Pohyb v gravitačním poli, Keplerovy zákony.

4. Soustava hmotných bodů a tuhé těleso.

Popis soustavy, stupeň volnosti. Kinematika tuhého tělesa. Věty o hybnosti a momentu hybnosti soustavy - 1. a 2. věta impulsová. Věty o zachování hybnosti a momentu hybnosti. Energie soustavy hmotných bodů, Königova věta. Zjednodušení soustav sil působících na tuhé těleso.

5. Otáčení tuhého tělesa.

Otáčení kolem pevné osy, pohybová rovnice, moment setrvačnosti. Těžká kladka, kyvadlo, valení. Steinerova věta. Kinetická energie otáčejícího se tělesa. Stručná zmínka o tenzoru setrvačnosti a otáčení tělesa kolem pevného bodu.

6. Kmity a vlnění.

Kmity tlumené, vynucené, skládání kmitů, vázané kmity, aperiodický tlumený pohyb, rezonance. Pojem vlny, vlnová rovnice, rovinná vlna. Energie a intenzita vlny. Harmonická vlna, způsoby popisu, vztah vlnová délka-rychlost-frekvence. Fázová rychlost a grupová rychlost. Typy vlnění, polarizace. Princip superpozice, interference vlnění, stojaté vlnění. Huygensův princip, lom, odraz. Dopplerův jev.

7. Kontinuum - obecné pojmy.

Kinematika kontinua. Tenzor napětí, tenzor deformace a tenzor rychlosti deformace. Rovnice rovnováhy a pohybová rovnice kontinua.

8. Pružnost.

Zobecněný Hookův zákon. Základní úloha teorie pružnosti. Tah, smyk, torze, ohyb.

9. Mechanika tekutin.

Kapalina a plyn. Rovnováha tekutin, hydrostatický tlak, Pascalův zákon, barometrická rovnice, Archimedův zákon. Rovnice kontinuity, proudění ideální tekutiny, Bernoulliho rovnice. Proudění viskózní kapaliny, Newtonův viskózní zákon, Poiseuillův vztah. Laminární a turbulentní proudění.

II. MOLEKULOVÁ FYZIKA A TERMODYNAMIKA

1. Základy termodynamiky.

Termodynamická soustava a její rovnováha. Teplo, teplota, tepelná kapacita. První termodynamický zákon, vnitřní energie ideálního plynu. Stavová rovnice ideálního plynu. Vratné a nevratné děje, Carnotův cyklus, termodynamická teplota. Druhý termodynamický zákon, entropie. Třetí termodynamický zákon.

2. Molekulárně kinetická teorie látek.

Základy statistického popisu. Tlak a teplota, Boltzmannův vztah a entropie. Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení. Střední volná dráha, počet srážek, Brownův pohyb. Difúze, 1. a 2. Fickův zákon, tepelná vodivost, vnitřní tření.

3. Reálné plyny a fázové přechody.

Stavová rovnice reálných plynů. Jouleův-Thomsonův jev. Rovnovážný fázový diagram jednosložkové soustavy, Gibbsovo pravidlo fází. Skupenská tepla a teploty fázových přeměn.

4. Molekulární jevy v kapalinách.

Povrchové napětí. Youngova-Laplaceova rovnice.

Doporučená studijní literatura:

Mechanika:

A. Havránek: Klasická mechanika I-II, skriptum, Carolinum, Praha 2002-3

J. Kvasnica a kol.: Mechanika, Academia, Praha 1998, 2004

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker: Fyzika, Vutium, Brno 2000 (elementární učebnice)

web: <https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/Mechanika/> (doc Dvořák – Mechanika pro učitelství s.š.) !
https://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/www/fyzika.html (pro dálkaře)

Termodynamika a molekulová fyzika:

P. Atkins, J. de Paula: Fyzikální chemie, VŠChT Praha 2013 (kap. 1-4 – termodyn., mol.fyz.)

Doplňková:

R.P.Feynman, R.B.Leighton, M.Sands: Feynmanovy přednášky z fyziky I, II, Fragment, 2000

R. Bakule, E. Svoboda : Molekulová fyzika, Academia, Praha 1992

J.Obdržálek, A. Vaněk: Termodynamika a molekulová fyzika, skriptum, PF Ústí n.L., 2000

P. Atkins, Čtyři zákony, které řídí vesmír, Academia 2012

Z. Horák, F. Krupka: Fyzika, SNTL, Praha 1976, 1981

Cvičení:

J.Fährnich, A.Havránek, D.Slavínská: Příklady z mechaniky, skriptum, Karolinum, Praha 2005

Matematická:

J.Kvasnica: Matematický aparát fyziky, Academia 1997

K. Rektorys a kol.: Přehled užití matematiky, SNTL 1968, Prometheus 2009

Jak bude v roce 2021/2 probíhat výuka

Zkouška: ústní s písemnou přípravou

- nutnou podmínkou pro konání zkoušky je získání zápočtu ze cvičení
- zkouška: znalosti odpovídající sylabu přednášky a v rozsahu prezentovaném na přednášce; případné příklady zadané při zkoušce pouze ty, které byly počítané na přednášce

Zápočet: aktivní účast na cvičení a úspěšné absolvování testů (detaily stanoví cvičící)

Prezentace:

[//alma.karlov.mff.cuni.cz/fyzika1/](https://alma.karlov.mff.cuni.cz/fyzika1/)

Doplňková výuka-semináře:

NOFY002 - Proseminář z matematických metod fyziky, 0/2 Z

NOFY071 - Procvičovací seminář z Fyziky I, 0/2 Z

Stručný historický přehled

Starověk

Aristoteles (384 – 322 př.n.l., Řecko)

- Spekulativní filosofie, pozorování (disputace, argumentace) bez matematiky a experimentů
- prvotní hmota, prvotní rozum (nús, duch = čistá forma bez hmoty, udělil hmotě pohyb - první hybatel)

⇒ závěry často spekulativní, chybné !

např.: těleso je udržováno v pohybu neustálým působením vnější síly; když přestane působit síla, pohyb (vzhledem k zemi) se zastaví, pro pohyb je podstatné médium – vzduch okolo šípů prostřednictvím vírů a vibrací posune šíp vpřed (tlačí ho zezadu), vakuum neexistuje.... filosofický princip

Archimédes (287 – 212 př.n.l., Syrakusy)

- matematik, fyzik, astronom
- proslul jako vynálezce a experimentátor

Pythagoras, Eukleides (~360–290 př.n.l.) – geometrie

Demokritos (~460–370 př.n.l.) matematik, atomista

Platón (427-347) – „bez znalosti geometri nevstupuj“, **Akademia** – vzdělávací instituce

Múseion (Chrám múz, alexandrijská knihovna) věd.středisko, zal. Ptolemaios I.

KlaudiosPtolemaios (90-168) – geocentrický model, Almagest, astronomické tabulky

Překlady řeckých děl, scholastika → do arabštiny → do latiny ... Cordóba (knihovna)

Stručný historický přehled

Středověk ... období hlubokého útlumu

Renesance

Mikoláš Koperník (lat. Nicolaus Copernicus, 1473 – 1543, Toruň)

- rozvinul představy starořeckých heliocentriků (Aristarchos ze Samu), *Šest knih o obězích sfér nebeských*

Francis Bacon (1561 – 1625), filozof, státník

- induktivní metody zkoumání, základ - přesné pozorování

Galileo Galilei (1564 – 1642, Itálie)

- astronom, filosof, fyzik
- odmítá slepou důvěru k autoritám (Aristoteles, církve)
- *Dialog o dvou světových systémech – Ptolemaiově a Koperníkově* (1632)
- princip relativity, zákon setrvačnosti !



Stručný historický přehled

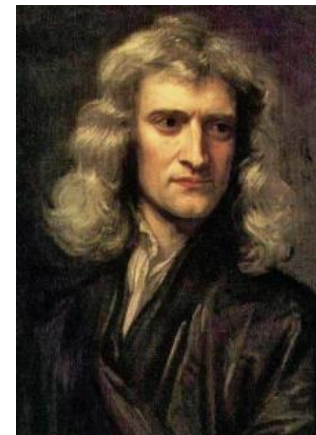
Renesance – vznik klasické mechaniky

- **Johannes Kepler (1571 – 1630, Německo)** Praha 1600-1612, 1. a 2. Keplerův z.,
matematik, astronom, astrolog Tycho Brahe
zákonitosti pohybu nebeských těles (matem.popis)
- **René Descartes (lat. Renatus Cartesius, 1596 – 1650, Francie)**
zakladatel analytické geometrie
kartézský systém souřadnic
teorie vírů
Voltaire – cokoliv Descartes publikoval o fyzice (=přírodě) je špatně, Emilie du Chatelet
- **Robert Hooke (1635 – 1703, Anglie)** předseda Royal Academy
filosof, fyzik, astronom, vynálezce, architekt
Hookeův zákon, mikroskop
- **Christian Huygens (1629 – 1695, Holandsko)**
filosof, fyzik, astronom, kyvadlové hodiny

Stručný historický přehled - 2.pol. 17 stol.

Isaac Newton (1643-1727)

- Fyzik, matematik, filosof, teolog
- *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687)
- zákon všeobecné gravitace – propojení s Keplerovými zákony (tělesa na Z. se pohybují podle stejných zákonů jako planety)
- ZZ hybnosti a momentu hybnosti
- Infinitesimální počet



Gottfried W. Leibnitz (1646-1716)

- Fyzik, matematik, filosof, teolog
- *Système nouveau de la nature* (1695)
- ZZ kin.energie (*vis viva*)
- Prostor a čas jsou relativní x absolutní
- Infinitesimální počet – jeho způsob zápisu se používá dodnes



Infinitesimální počet (derivace, integrály)

Stručný historický přehled - 18. - 20. stol.

Analytická (klasická) mechanika (matematika -Euler, Gauss...), 18.-19.st.

vzor pro ostatní vědy !

Leonhard Euler (1707-1782) – (největší z matematiků všech dob, 40 knih, 850 vědeckých prací) - Eulerovy věty, E.principy, E.konstanty, E.úhly, E.integrály, E.číslo, E.funkce, E.vzorce, E.substituce ... , zavedl vektory
Mechanika (metodami matem.analýzy), *Teorie pohybu tuhých těles*, *Algebra* ...

Karl F. Gauss (1777-1855) – „kníže matematiků“, astronom,
Gaussovo rozdělení, F: poruchový počet, matem.podoba Newtonova GZ a Coulombova z.,
zavedl potenciál
Teorie pohybu nebeských těles, *Nová metoda řešení přitažlivosti těle*, *Teorie kapal.těles*

Thomas Young (1773-1829) vlnová povaha světla/ interference, (poslední, kdo znal vše)

Michael Faraday (1791-1867) – propojení elektřiny a magnetismu, „největší experimentátor“

James C. Maxwell (1831-1879) – elektromagnetická teorie, molekulová fyzika ...

Stručný historický přehled - 20. stol.

Moderní pojetí

Max Planck (1857-1947) - kvanta záření (záření černého tělesa)

Wilhelm C. Roentgen (1875-1923), X-rays (1895), **W.Bragg, M.Laue** – difrakce na krystalech ... první „zobrazení atomů“

H.A. Lorentz (1853-1928) L.transformace, kontrakce délek

Albert Einstein (1879-1955) navázal na výsledky - Lorentze, Poincarého

Postuláty STR

- princip relativity (Poincaré) \forall fyzikální zákony mají stejný tvar ve \forall I.S.S.
- princip konst. rychlosti světla (ve \forall I.S.S.) – „fyzika éter nepotřebuje“

Teorie gravitace, stimulovaná emise, fotoelektrický jev ...

Kvantová mechanika 20.st.

Mechanika – popisuje pohyb těles v prostoru a čase a jejich chování při působení síly
Podle volby **vztažného tělesa** se jeví pohyb sledovaného tělesa různě - pohyb je **relativní!**

Newtonova klasická mechanika (klasická mechanika) - uspokojivý obraz mechanického pohybu těles složených z **velkého počtu částic (velké rozměry)**, jejichž **rychlosti jsou malé** ve srovnání s rychlostí světla. Výrazněji se **neprojeví kvantová povaha** hmoty a není tedy třeba přihlížet ani ke kvantové mechanice.

Prostor - pro popis mechanického pohybu zavádí klasická mechanika pojem **absolutního prostoru** jako kontinua, v němž jsou rozmístěna pohybující se tělesa.
Absolutní prostor není přítomností těles ovlivněn, všechna jeho místa jsou rovnocenná (**homogenita** prostoru) a všechny směry v něm jsou rovnocenné (**izotropie** prostoru).

Čas se v klasické mechanice jeví jako samostatný, **nezávislý** na pohybujících se tělesech a všude stejně plynoucí

Pozn. relativistická m. $v \sim c$,

kvantová m.: pohyb „malé“ částice v „omezeném“ prostoru

Termodynamika – fenomenologická věda, (zákl. pojmy: teplo, teplota, přeměny energie)

Molekulová fyzika – předp. vnitřní struktura látek (molekuly, atomy), modeluje (počítá) jejich chování, kin.teorie plynů – klasická mikroskopická teorie

Limity platnosti klasické mechaniky:

- přítomnost velkých gravitačních sil (obecná teorie relativity)
- rychlosti těles se blíží rychlosti světla (speciální teorie relativity)
- pohybové děje na úrovni mikrosvěta, kdy se začíná projevovat kvantová povaha hmoty (pohybu „malých“ částic v „omezeném“ prostoru - kvantová mechanika).

Látka x fyzikální pole

klasické pojetí:

látka - z částic s klidovou hmotností

pole - neskládá se z částic, ale zprostředkuje silové působení mezi látkovými částicemi,
popis pole - klasicky pomocí fyzikální veličiny, charakterizující silové působení př.: silové, teplotní, tlakové, elektromagnetické pole,...
nebo kvantově jako výměnu zprostředkujících (intermediálních) polních částic

Typy fyzikálních polí:

Skalární pole – popsáno skalární veličinou v prostoru (např. teplotní, tlakové pole)

Vektorové pole – popsáno vektorovou veličinou v prostoru, tj. prostorové rozložení vektorové veličiny (např. pole rychlosti proudění kapaliny, elektrické pole, silové pole)

Homogenní pole (× heterogenní) – fyzikální veličina/vlastnosti se v prostoru nemění, nezávisí na souřadnici

Izotropní pole (× anizotropní) - vlastnosti ve všech směrech stejné, tj. nezávisí na směru

Stacionární pole – veličina nezávisí na čase

Typy fyzikálních prostředí (látka i pole):

Homogenní prostředí (× heterogenní) – prostředí, jehož vlastnosti jsou stejné ve všech místech

Izotropní prostředí (× anizotropní) – prostředí, jehož fyzikální vlastnosti jsou stejné ve všech směrech, tj. nezávisí na směru

Veškeré poznání pochází z pozorování →

Hypotéza

- Předpoklad možného stavu, domněnka, jejíž platnost není ještě plně prokázána
- Je podložena řadou faktů vytyčující další směr výzkumu
- H. je *testovatelná*, je možno předvídat výsledky experimentů, je možno ji potvrdit nebo vyvrátit

Teorie

- Popisuje zákonitosti a souvislosti celé skupiny jevů v určitém oboru
- Co nejlepší přiblížení realitě, vystavěno na objektivních důkazech (rozpracování hypotéz)
- Je vnitřně konzistentní, tj. nejsou v ní rozpory, každá teorie má však své limity
- Na základě teorie vytvoříme různé modely:

Model - kvalitativní / kvantitativní (matem.), zjednodušení úlohy

Zákon

- Popisuje pozorování v přírodě (zatímco teorie se ho snaží vysvětlit)
- Je vždy pravdivý – vychází z mnoha pozorování

Postulát – Axiom

- Je výchozí předpoklad (tvrzení), který je v dané teorii přijímán jako pravdivý

„Spekulace“

Fyzikální veličiny:

kvantity (hmota, náboj, ...), **intenzity** (kvality: teplota, napětí...)

Určeny velikostí a rozměrem (jednotkami):

$$\text{VELIČINA} = \text{ČÍSELNÝ ÚDAJ} \text{ krát } \text{JEDNOTKA}$$

Soustavy jednotek (věk dohody):

- **SI** (mezinárodní)
- **Absolutní – Gaussova**, (cgs)
- **MKSA** (technická)
- ...

Fyzikální veličina	Jednotka	Značka
<u>Délka</u>	<u>metr</u>	m
<u>Hmotnost</u>	<u>kilogram</u>	kg
<u>Čas</u>	<u>sekunda</u>	s
<u>Termodynamická teplota</u>	<u>kelvin</u>	K
<u>Látkové množství</u>	<u>mol</u>	mol
<u>Elektrický proud</u>	<u>ampér</u>	A
<u>Svítivost</u>	<u>kandela</u>	cd

- každá fyzikální veličina se skládá z hodnoty a rozměru. Rozměry nesmíme vynechávat (jsou stejně důležité jako číslo samotné).
- matematické funkce musí mít bezrozměrné argumenty, např. $\cos(\omega t)$, $\exp(kx)$...

př.: z rozměrové analýzy odvoďte vztah pro frekvenci kmitů matematického kyvadla

Fyzikální veličiny - shrnutí:

Skaláry – vyjádřeny jedním údajem (velikostí),
př.: hmota, náboj, teplota, energie
(aritmetika)

Vektory – vyjádřeny třemi složkami ve 3D prostoru, (obecně n složek: n -D prostor)
– ve 3D prostoru si lze ho představit jako orientovanou úsečku, kterou lze libovolně posouvat (vyjádřeny velikostí a směrem)
– operace s vektory (skládání, natahování ..) provádíme po složkách
př.: poloha, rychlost, zrychlení, síla, intenzita fyzikálního pole, el.proud...
(vektorová algebra)

Tenzory – obecně 3^k složek, k – řád tenzoru
souvisí s anizotropií materiálových parametrů,
př. tenzorů 2. řádu: moment setrvačnosti, tenzor napětí, t. deformace,
permitivita
(tenzorová algebra)

Fyzikální veličiny:

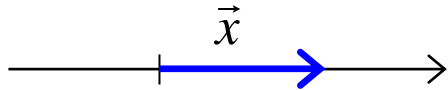
Skalární: invariantní vůči volbě souřadnicové soustavy (velikost)

Vektorové: závisí na volbě souřadnicové soustavy (velikost + směr)

Tenzorové

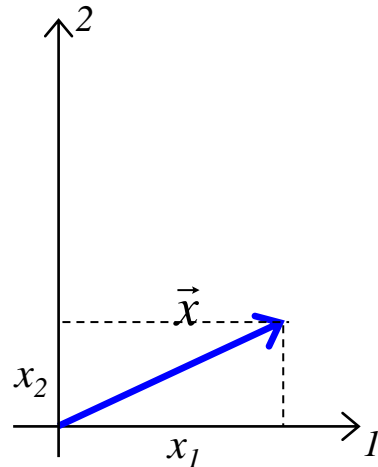
1 D

- skalár: x
- vektor: $\pm x$



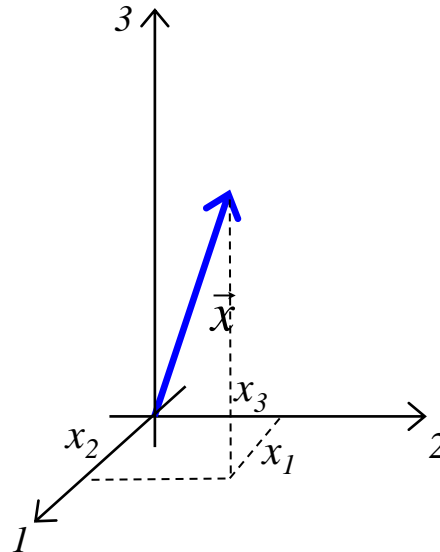
2 D

- skalár: x
- vektor: (x_1, x_2)



3 D

- skalár: x
- vektor: (x_1, x_2, x_3)

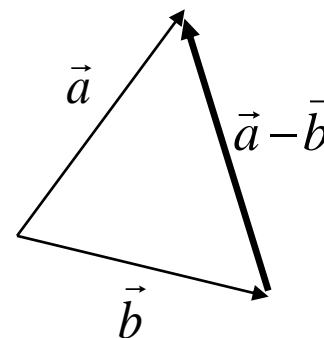
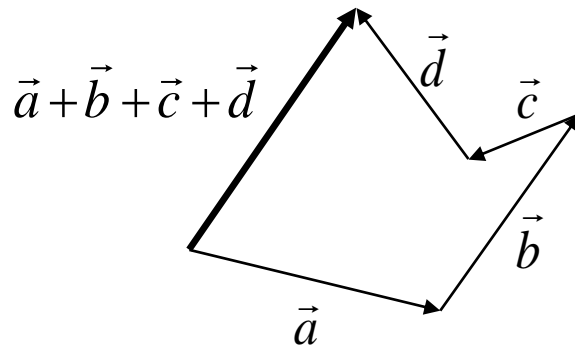
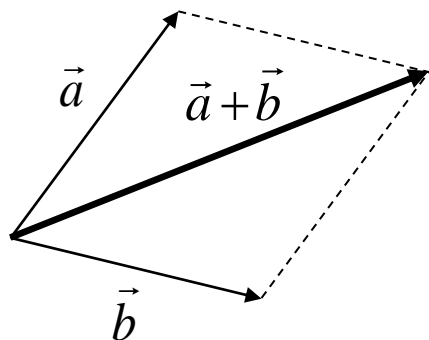


n D

- skalár: x
- vektor: (x_1, x_2, \dots, x_n)

Vektorové fyzikální veličiny, operace s vektory

- součet / rozdíl vektorů:



$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

- násobení reálným koeficientem (protažení vektoru):

$$\mathbf{c} = k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$$

- některá základní pravidla:

$$\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{V} + \mathbf{U},$$

$$\alpha (\mathbf{U} + \mathbf{V}) = \alpha \mathbf{U} + \alpha \mathbf{V},$$

$$\alpha (\beta \mathbf{U}) = (\alpha \beta) \mathbf{U},$$

$$\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{U} + \mathbf{W} \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{W}.$$

$$\mathbf{U} + (\mathbf{V} + \mathbf{W}) = (\mathbf{U} + \mathbf{V}) + \mathbf{W},$$

$$(\alpha + \beta) \mathbf{U} = \alpha \mathbf{U} + \beta \mathbf{U},$$

$$1 \mathbf{U} = \mathbf{U},$$

Soustavy souřadné

Pravoúhlý kartézský systém – 3 navzájem kolmé osy (pravotočivá × levotočivá)

- každý bod prostoru určen 3 souřadnicemi
- vektor popsán svými 3 průměty do souřadných os a ortogonálními vektory báze (jednotkovými vektory)

vektor:

$$\vec{a} \equiv \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_k$$

velikost vektoru:

$$a = |\vec{a}| \equiv \|\mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^3 a_k^2}$$

vektory báze:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$$

$$\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

Polohový vektor:

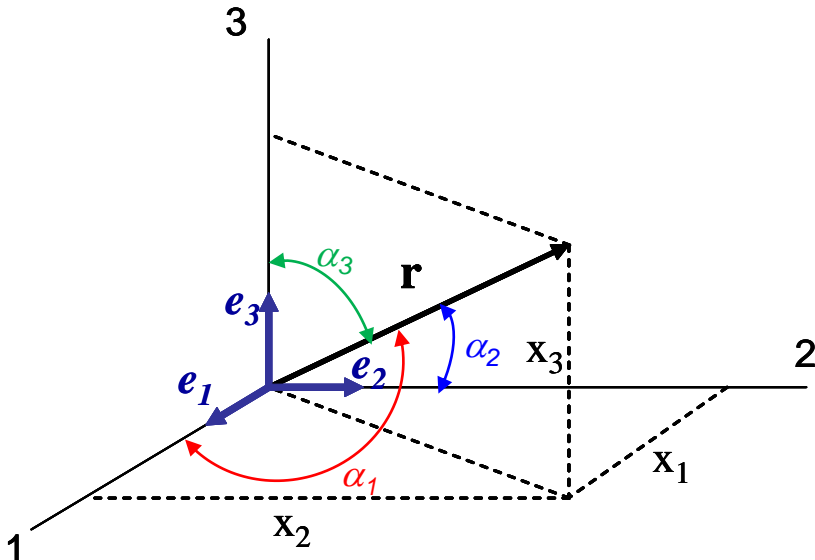
$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = \sum_{k=1}^3 x_k \vec{e}_k \equiv x_k \vec{e}_k$$

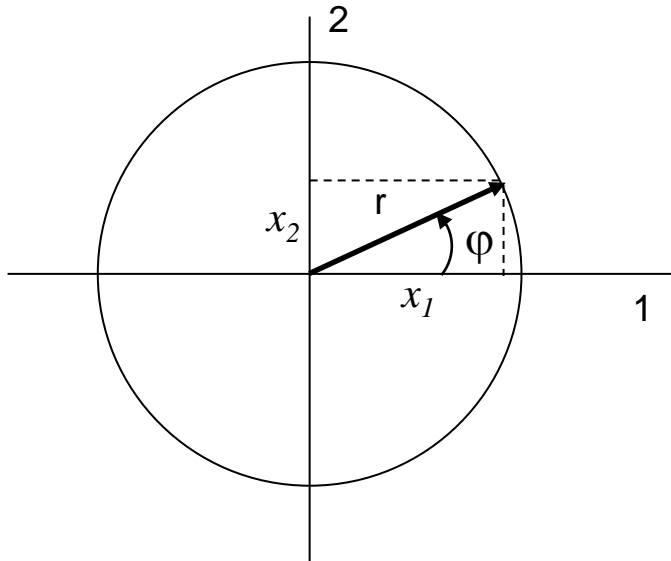
Směrové kosiny:

$$\cos \alpha_k = \frac{x_k}{r},$$

$$\sum_k \cos^2 \alpha_k = 1$$



Polární souřadnice – kruhová symetrie v rovině



$$x_1 = r \cos \varphi$$

$$x_2 = r \sin \varphi$$

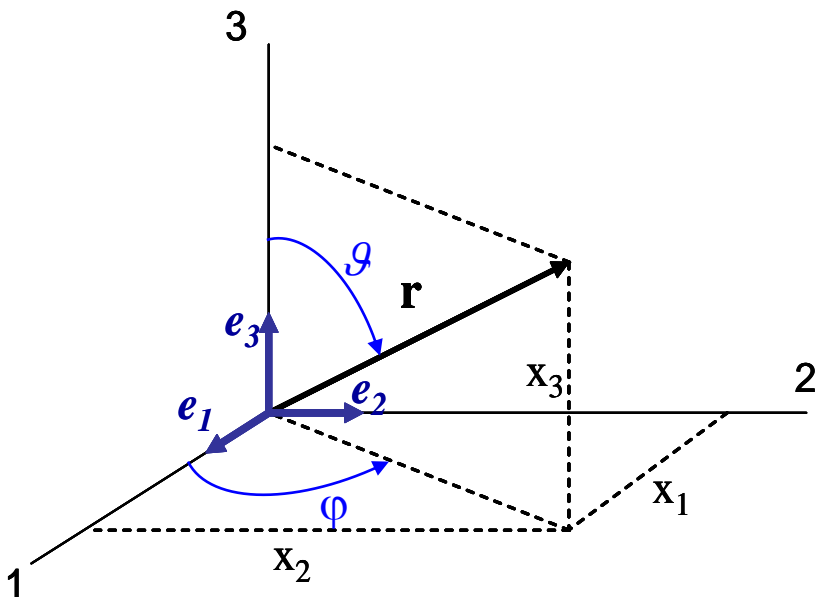
$r \geq 0$... průvodič

$\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$... polární úhel

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1}$$

Sférické souřadnice – kulová symetrie ve 3D prostoru



$$x_1 = r \cos \varphi \sin \theta$$

$$x_2 = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$x_3 = r \cos \theta$$

$$r^2 = \sum x_k^2$$

$$\cos \theta = x_3/r$$

$$\operatorname{tg} \varphi = x_2/x_1$$

Základy vektorového počtu

Skalární součin dvou vektorů

výsledkem je číslo (skalár)

$$\begin{aligned} S &= (\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{k=1}^3 a_k b_k \\ &= ab \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

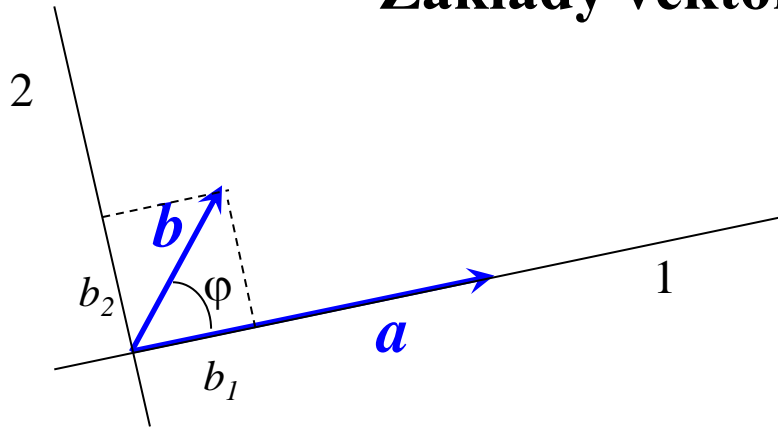
$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = ab$$

Velikost vektoru: $a^2 = |\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{a}, \vec{a}) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \sum a_k^2$

Průmět vektoru do směru e : $a_e = \vec{a} \cdot \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|} = a \cos \varphi$

Př.: práce ve fyzice, určení úhlu mezi vektory viz př.

Základy vektorového počtu



$$\vec{a} = (a, 0, 0)$$

$$\vec{b} = (b \cos \varphi, b \sin \varphi, 0)$$

Skalární součin

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ &= ab \cos \varphi + 0 \cdot b \sin \varphi + 0 \cdot 0 \\ &= ab \cos \varphi\end{aligned}$$

Určení úhlu mezi 2 vektory:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

př.: určete úhel mezi tělesovou úhlopříčkou a hranou krychle (tělesa tvaru ...)

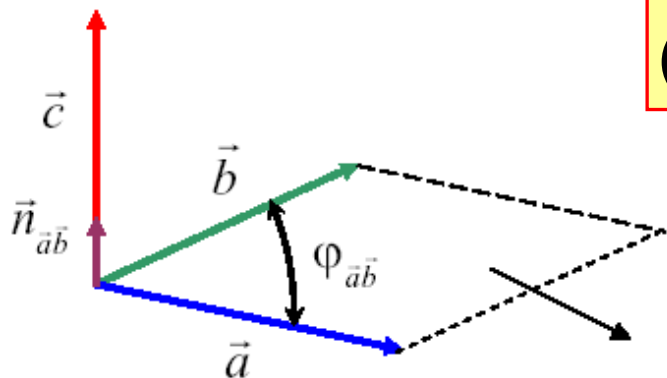
Průmět vektoru do směru \vec{a} :

$$b_a = \vec{b} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = b \cos \varphi$$

Vektorový součin dvou vektorů

- výsledkem je vektor, kolmý na oba vektory

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \equiv [\vec{a}, \vec{b}] = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$



plocha: $S = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \varphi_{\vec{a}\vec{b}}$

Zřejmě platí:

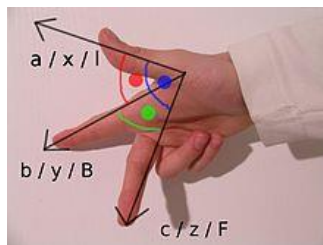
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0, \quad \vec{a} \times \vec{a} = 0$$

Definován jen ve 3 D prostoru!

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tvoří pravotočivý systém

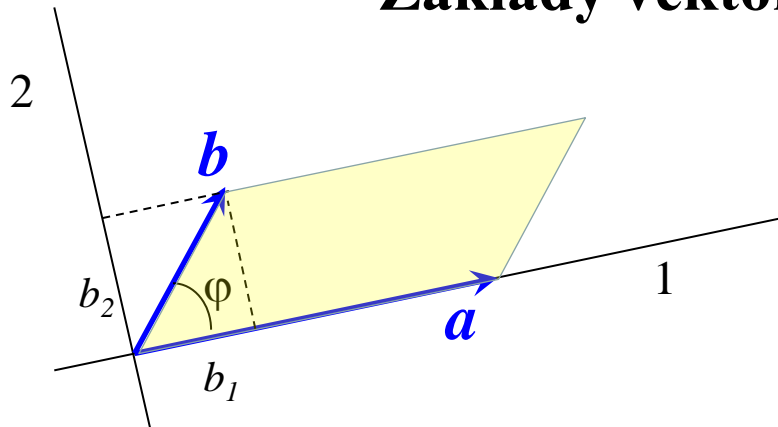


pravidlo
pravé ruky

(pravidlo
vývrtky)

Př.: momenty síly a hybnosti, pohyb částice v magn. poli, určení kolmice

Základy vektorového počtu



Vektorový součin

$$\vec{a} = (a, 0, 0)$$

$$\vec{b} = (b \cos \varphi, b \sin \varphi, 0)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, ab \sin \varphi)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{ab} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Geometrický význam:

- určení kolmice k rovině
- plocha rovnoběžnostěnu: $S = a b \sin \varphi$
- objem rovnoběžnostěnu:

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

Vektory polopatě

<https://www.matweb.cz/vektory/>

Anizotropní látky:

Portál středoškolské matematiky:

<https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/>

[Analytická geometrie - Vektory - Co je to vektor \(cuni.cz\)](#)

Tenzory

Příklad: $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$... materiálový vztah, ε je skalár, pouze pro izotropní homogenní látky!

Pro anizotropní látky: ε – tenzor 2. řádu

$$\begin{array}{lcl}
 D_1 = \varepsilon_1 E_1 & & D_1 = \varepsilon_{11} E_1 + \varepsilon_{12} E_2 + \varepsilon_{13} E_3 \\
 D_2 = \varepsilon_2 E_1 & \implies & D_2 = \varepsilon_{21} E_1 + \varepsilon_{22} E_2 + \varepsilon_{23} E_3 \\
 D_3 = \varepsilon_3 E_1 & & D_3 = \varepsilon_{31} E_1 + \varepsilon_{32} E_2 + \varepsilon_{33} E_3
 \end{array}$$

ve složkách: $D_i = \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} E_j \equiv \varepsilon_{ij} E_j$ (Einsteinova součtová konvence)

vektorově: $\vec{D} = \hat{\varepsilon} \vec{E}$

maticový zápis:

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

pozn: symetrie tenzoru permitivity souvisí se symetrií látky, při vyšší symetrii se počet nezávislých složek snižuje, u izotropní látky přechází ve skalár (1 nezávislá složka – hodnoty na hl.diagonále matice jsou stejné)

Tenzory vyšších řádů, např.:

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + z_{ijk} E_k + Z_{ijkl} E_k E_l + \dots$ z_{ijk} elektrooptický tenzor 3.ř.

$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}$ σ_{ij} tenzor deformace, e_{kl} tenzor napětí, c_{ijkl} tenzor pružnosti 4.ř.